NGUYỄN BẢO VƯƠNG

CHƯƠNG V. ĐẠO HÀM – TẬP 1.

GIÁO VIÊN MUỐN MUA FILE WORD LIÊN HỆ 0946798489 hoặc Liên hệ qua

Facebook: https://web.facebook.com/phong.baovuong
Website: http://tailieutoanhoc.vn/
Email: baovuong7279@gmail.com
Page Facebook: https://web.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/

ALBA – CHƯ SÊ- GIA LAI

CHƯƠNG V. ĐẠO HÀM

TẬP 1. KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH ĐẠO HÀM

NGUYỄN BẢO VƯƠNG

Mục Lục

CHỦ ĐỀ: ĐẠO HÀM

KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

1. Đạo hàm tại một điểm

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(a;b)$, được gọi là có đạo hàm tại $x_0\in(a;b)$ nếu giới hạn sau tồn tại (hữu hạn): $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ và giá trị của giới hạn đó gọi là giá trị đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 .Ta kí hiệu $f'(x_0)$.

Vậy $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

2. Đạo hàm bên trái, bên phải

$f'(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. $\quad f'(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Hệ quả : Hàm $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0\Leftrightarrow\exists f(x_0^+)$ và $f'(x_0^-)$ đồng thời $f'(x_0^+)=f'(x_0^-)$.

3. Đạo hàm trên khoảng, trên đoạn

- Hàm số $f(x)$ có đạo hàm (hay hàm khả vi) trên $(a;b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $(a;b)$.
- Hàm số $f(x)$ có đạo hàm (hay hàm khả vi) trên $[a;b]$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $(a;b)$

đồng thời tồn tại đạo hàm trái $f'(b^-)$ và đạo hàm phải $f'(a^+)$.

4. Mối liên hệ giữa đạo hàm và tính liên tục

Định lí: Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì $f(x)$ liên tục tại x_0.

Chú ý: Định lí trên chỉ là điều kiện cần, tức là một hàm có thể liên tục tại điểm x_0 nhưng hàm đó không có đạo hàm tại x_0.

Chẳng hạn: Xét hàm $f(x)=|x|$ liên tục tại $x=0$ nhưng không liên tục tại điểm đó.

Vì $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1$, còn $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-1$.

Vấn đề 1. Tính đạo hàm bằng định nghĩa

Phương pháp:

- $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- $f'(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- $f'(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x=x_0\Leftrightarrow f'(x_0^+)=f'(x_0^-)$
- Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm thì trước hết phải liên tục tại điểm đó.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ:

1. $f(x)=2x^3+1$ tại $x=2$

3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$ tại $x=0$

2. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ tại $x=1$

Lời giải.

1. Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-16}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}2(x^2+2x+4)=24 \Rightarrow f'(2)=24$.

2. Ta có : $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Ta có $f(0)=0$, do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^3+x^2+1}+1}=\dfrac{1}{2}$

Vậy $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2+|x+1|}{x-1}$ liên tục tại $x=-1$ nhưng không có đạo hàm tại điểm đó.

Lời giải.

Vì hàm $f(x)$ xác định tại $x=-1$ nên nó liên tục tại đó.

Ta có: $f'(-1^+)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{2x}{x-1}=1$

$f'(-1^-)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}2=2$

$\Rightarrow f'(-1^+)\neq f'(-1^-)\Rightarrow f(x)$ không có đạo hàm tại $x=-1$.

Ví dụ 3. Tìm a để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ có đạo hàm tại $x=1$

Lời giải.

Để hàm số có đạo hàm tại $x=1$ thì trước hết $f(x)$ phải liên tục tại $x=1$

Hay $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2=f(1)=a$.

Khi đó, ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{x^2-1}{x-1}-2}{x-1}=1$.

Vậy $a=2$ là giá trị cần tìm.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra

Câu 1. $f(x)=2x+1$ tại $x_0=1$

A.2 **B.**3 **C.**4 **D.**5

Bài làm 1. Ta có: $f'(x_0)=2$

Câu 2. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ tại $x_0=2$

A. -2 **B.**2 **C.**3 **D.**4

Bài làm 2 . $f'(x_0)=-2$

Câu 3. $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ tại điểm $x_0=2$

A. $\sqrt{2}$ **B.** $\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$ **C.** $\dfrac{8}{\sqrt{3}}$ **D.** $\sqrt{41}$

Bài làm 3. $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{7}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{7})}=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$

Câu 4. $f(x)=\sin^2 x$ tại $x=\dfrac{\pi}{2}$

A. 0 **B.**1 **C.**2 **D.**3

Bài làm 4. $f'(\dfrac{\pi}{2})=0$

Câu 5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 0 & \text{khi } x=1\end{cases}$ tại điểm $x_0=1$.

A. $\dfrac{1}{3}$ **B.** $\dfrac{1}{5}$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{1}{4}$

Bài làm 5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}+1}=\dfrac{1}{2}$

Vậy $f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

Bài 2 Tính đạo hàm của các hàm số sau tại điểm chỉ ra

Câu 1. $f(x)=\sin 2x$ tại $x_0=\frac{\pi}{2}$

A. -1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Bài làm 1. Ta có: $f(x)-f(\frac{\pi}{2})=\sin 2x-\sin\pi=2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}=2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right).\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=-2$$

Vậy $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

Câu 2. $f(x)=\tan x$ tại $x=\frac{\pi}{4}$

A. 2 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 31

Bài làm 2. Ta có $f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\tan x-\tan\frac{\pi}{4}=\ 1+\tan x\ .\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Suy ra $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\tan x)\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=2$

Vậy $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$.

Câu 3. $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$ tại $x=0$.

A. 0 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** 7

Bài làm 3. Ta có: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

Vậy $f'(0)=0$.

Bài 3 Tính đạo hàm các hàm số sau tại các điểm chỉ ra

Câu 1. $f(x)=x^3$ tại $x_0=1$

A. 4 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 6

Bài làm 1. Ta có: $f(x)-f(1)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

Suy ra: $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\ x^2+x+1\ =3$

Vậy $f'(1)=3$.

Câu 2. $f(x)=\begin{cases}2x+3 & khi\ x\ge 1\\ \dfrac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1} & \text{khi } x<1\end{cases}$ tại $x_0=1$.

A. 0 **B.** 4 **C.** 5 **D.** Đáp án khác

Bài làm 2. Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\ 2x+3\ =5$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+3x-4)=0$

Dẫn tới $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\Rightarrow$ hàm số không liên tục tại $x=1$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x_0=1$.

Câu 3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x}{x} & \text{khi } x>0\\ x+x^2 & \text{khi } x\le 0\end{cases}$ tại $x_0=0$

A.1 **B.2** **C.3** **D.5**

Bài làm 3. Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}.\sin x\right)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\ x+x^2\ =0$ nên hàm số liên tục tại $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}=1$ và

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x+x^2}{x}=1$

Vậy $f'(0)=1$.

Câu 4. $f(x)=\dfrac{x^2+|x+1|}{x}$ tại $x_0=-1$.

A.2 **B.0** **C.3** **D.**đáp án khác

Bài làm 4. Ta có hàm số liên tục tại $x_0=-1$ và

$\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\dfrac{x^2+x+|x+1|}{x(x+1)}$

Nên $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2+2x+1}{x(x+1)}=0$

$\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2-1}{x(x+1)}=2$

Do đó $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}\ne\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại điểm $x_0=-1$.

Nhận xét: Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại $x=x_0$ thì phải liên tục tại điểm đó.

Bài 4

Câu 1. Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+x & khi\ x\geq 1 \\ ax+b & khi\ x<1 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x=1$.

A. $\begin{cases} a=23 \\ b=-1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} a=3 \\ b=-11 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} a=33 \\ b=-31 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}$

Bài làm 1. Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+x)=2$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax+b)=a+b$

Hàm có đạo hàm tại $x=1$ thì hàm liên tục tại $x=1$ $\Leftrightarrow a+b=2$ (1)

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+2)=3$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{ax+b-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{ax-a}{x-1}=a$ (Do $b=2-a$)

Hàm có đạo hàm tại $x=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}$.

Câu 2. Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & khi\ x\geq 0 \\ 2x^2+ax+b & khi\ x<0 \end{cases}$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

A. $a=10,b=11$ **B.** $a=0,b=-1$ **C.** $a=0,b=1$ **D.** $a=20,b=1$

Bài làm 2. Ta thấy với $x\neq 0$ thì $f(x)$ luôn có đạo hàm. Do đó hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm có đạo hàm tại $x=0$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=b \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow b=1$.

Khi đó: $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$; $f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=a$

$\Rightarrow f'(0^+)=f'(0^-)\Leftrightarrow a=0$.

Vậy $a=0,b=1$ là những giá trị cần tìm.

Câu 3. Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x+1} & \text{khi } x\geq 0 \\ ax+b & \text{khi } x<0 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=0$.

A. $a=-11,b=11$ **B.** $a=-10,b=10$ **C.** $a=-12,b=12$ **D.** $a=-1,b=1$

Bài làm 3. Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1=f(0)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=b$

Hàm số liên tục tại $x=0\Leftrightarrow b=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-1}{x+1}=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-} a=a$

Hàm số có đạo hàm tại điểm $x=0\Leftrightarrow a=-1$

Vậy $a=-1,b=1$ là giá trị cần tìm.

CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

1. Quy tắc tính đạo hàm

1.1. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương của hàm số

- $(u_1 \pm u_2 \pm ... \pm u_n)' = u_1' \pm u_2' \pm ... \pm u_n'$
- $(k.u(x))' = k.u'(x)$
- $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$
- $(u^n(x))' = nu^{n-1}(x).u'(x)$
- $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$
- $\left(\dfrac{c}{u(x)}\right)' = -\dfrac{c.u'(x)}{u^2(x)}$.

1.2. Đạo hàm của hàm số hợp

Cho hàm số $y = f(u(x)) = f(u)$ với $u = u(x)$. Khi đó $y'_x = y'_u.u'_x$.

2. Bảng công thức đạo hàm các hàm sơ cấp cơ bản

Đạo hàm	Hàm hợp
$(c)' = 0$	
$(x)' = 1$	
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}.u'$
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(\sqrt[n]{u})' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'.\cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'\sin u$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

Vấn đề 1. Tính đạo hàm bằng công thức

Phương pháp: Sử dụng các quy tắc tính đạo hàm

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tính đạo hàm các hàm số sau:

1. $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

2. $y = -x^3 + 3x + 1$

3. $y = \dfrac{x^4}{4} - x^2 + 1$

4. $y = -2x^4 + \dfrac{3}{2}x^2 + 1$

5. $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$

6. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x+1}$

Lời giải.

1. Ta có: $y' = \left(-x^3+3x+1\right)' = 3x^2-6x+2$

2. Ta có: $y' = \left(-x^3+3x+1\right)' = -3x^2+3$

3. Ta có: $y' = \left(\frac{x^4}{4}-x^2+1\right)' = x^3-2x$

4. Ta có: $y' = \left(-2x^4+\frac{3}{2}x^2+1\right)' = -8x^3+3x$

5. Ta có: $y' = \frac{(2x+1)'(x-3)-(x-3)'(2x+1)}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2}$

6. Ta có: $y' = \frac{(x^2-2x+2)'(x+1)-(x^2-2x+2)(x+1)'}{(x+1)^2}$

$$= \frac{(2x-2)(x+1)-(x^2-2x+2)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-4}{\left(x+1\right)^2}.$$

Nhận xét: Với hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ta có: $y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình $f'(x)\ge 0$ biết:

1. $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

2. $f(x)=x-2\sqrt{x^2+12}$

3. $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}$

4. $f(x)=\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x}$

Lời giải.

1. TXĐ: $D=\left[-2;2\right]$

Ta có: $f'(x)=\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

Do đó: $f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow 4-2x^2\ge 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\le x\le \sqrt{2}$.

2. TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $f'(x)=1-\frac{2x}{\sqrt{x^2+12}}=\frac{\sqrt{x^2+12}-2x}{\sqrt{x^2+12}}$

Suy ra: $f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+12}\ge 2x$ (1)

- Với $x<0$ thì (1) luôn đúng
- Với $x\ge 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2+12\ge 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le x\le 2$

Vậy bất phương trình $f'(x)\ge 0$ có nghiệm $x\le 2$.

3. TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

Suy ra $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-2x\ \sqrt{x^2+x+1}=\ 1+2x\ \sqrt{x^2-x+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(1-2x)(1+2x)\ge 0\\ (1-2x)^2\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]=\ 1+2x\ ^2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}\\ (1-2x)^2=(1+2x)^2\end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

4. TXĐ: $D=\left[0;+\infty\right.$

Ta có: $f'(x)=\dfrac{x}{2\sqrt[4]{(x^2+1)^3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x}\ge \sqrt[4]{(x^2+1)^3} \Leftrightarrow x^6\ge (x^2+1)^3$

$\Leftrightarrow x^2\ge x^2+1$ bất phương trình này vô nghiệm

Ví dụ 3. Tính đạo hàm các hàm số sau:

1. $y=\sqrt{2x^2+3x+1}$

2. $y=\sqrt[5]{\sqrt{2x^2+1}+3x+2}$

3. $y=\sqrt{2\sin^2(2x-1)+\cos\sqrt{x}}$

4. $y=\tan(\sin^2 3x)+\sqrt{\cot^2(1-2x^3)+3}$

5. $y=\sqrt[3]{\sin(\tan x)+\cos(\cot x)}$

Lời giải.

1. Ta có: $y'=\dfrac{(2x^2+3x+1)'}{2\sqrt{2x^2+3x+1}}=\dfrac{4x+3}{2\sqrt{2x^2+3x+1}}$.

2. Ta có $y'=\dfrac{1}{5.\sqrt[5]{(\sqrt{2x^2+1}+3x+2)^4}}(\sqrt{2x^2+1}+3x+2)'$

$$=\frac{1}{5.\sqrt[5]{(\sqrt{2x^2+1}+3x+2)^4}}\left(\frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}+3\right).$$

3. Ta có: $y'=\dfrac{(2\sin^2(2x-1)+\cos\sqrt{x})'}{2\sqrt{2\sin^2(2x-1)+\cos\sqrt{x}}}=\dfrac{2\sin(4x-2)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{2\sin^2(2x-1)+\cos\sqrt{x}}}$

$$=\frac{4\sqrt{x}\sin(4x-2)-\sin\sqrt{x}}{4\sqrt{2x\sin^2(2x-1)+x\cos\sqrt{x}}}.$$

4. Ta có: $y'=[1+\tan^2(\sin^2 3x)](\sin^2 3x)'+\dfrac{[\cot^2(1-2x^3)+3]'}{2\sqrt{\cot^2(1-2x^3)+3}}$

$$=3[1+\tan^2(\sin^2 3x)]\sin 6x+\frac{6x^2[1+\cot^2(1-2x^3)]\cot(1-2x^3)}{\sqrt{\cot^2(1-2x^3)+3}}.$$

5. Ta có: $y'=\dfrac{[\sin(\tan x)+\cos(\cot x)]'}{3\sqrt{[\sin(\tan x)+\cos(\cot x)]^2}}$

$=\dfrac{(1+\tan^2 x)\cos(\tan x)+(1+\cot^2 x)\sin(\cot x)}{3\sqrt{[\sin(\tan x)+\cos(\cot x)]^2}}$.

Ví dụ 4. Tính đạo hàm các hàm số sau :

1. $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+1 & \text{khi } x>1 \\ 2x+2 & \text{khi } x\le 1 \end{cases}$ **2.** $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{2x} & \text{khi } x\ne 0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \end{cases}$

Lời giải.

1. Với $x>1 \Rightarrow f(x)=x^2-3x+1 \Rightarrow f'(x)=2x-3$

Với $x<1 \Rightarrow f(x)=2x+2 \Rightarrow f'(x)=2$

Với $x=1$ ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\ x^2-3x+1\ =-1\ne f(1) \Rightarrow$ hàm số không liên tục tại $x=1$, suy ra hàm số không có đạo hàm tại $x=1$

Vậy $f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{khi } x>1 \\ 2 & \text{khi } x<1 \end{cases}$.

2. Với $x\ne 0 \Rightarrow f(x)=x^2\cos\dfrac{1}{2x} \Rightarrow f'(x)=2x\cos\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{1}{2x}$

Với $x=0$ ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{2x}=0 \Rightarrow f'(0)=0$

Vậy $f'(x)=\begin{cases} \left(2x-\dfrac{1}{2}\right)\cos\dfrac{1}{2x} & \text{khi } x\ne 0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \end{cases}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tính đạo hàm các hàm số sau

Câu 1. $y=x^4-3x^2+2x-1$

A. $y'=4x^3-6x+3$ **B.** $y'=4x^4-6x+2$ **C.** $y'=4x^3-3x+2$ **D.** $y'=4x^3-6x+2$

Bài làm 1. Ta có: $y'=4x^3-6x+2$

Câu 2. $y=-\dfrac{x^3}{3}+2x^2+x-1$

A. $y'=-2x^2+4x+1$ **B.** $y'=-3x^2+4x+1$ **C.** $y'=-\dfrac{1}{3}x^2+4x+1$ **D.** $y'=-x^2+4x+1$

Bài làm 2. Ta có $y'=-x^2+4x+1$

Câu 3. $y=\dfrac{2x+1}{x+2}$

A. $-\dfrac{3}{x+2\;^{2}}$ **B.** $\dfrac{3}{x+2}$ **C.** $\dfrac{3}{x+2\;^{2}}$ **D.** $\dfrac{2}{x+2\;^{2}}$

✍**Bài làm 3.** Ta có $y'=\dfrac{(2x+1)'(x+2)-(x+2)'(2x+1)}{(x+2)^2}=\dfrac{3}{(x+2)^2}$

Câu 4. $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

A. $\dfrac{x^2-2x}{x-1\;^{2}}$ **B.** $\dfrac{x^2+2x}{x-1\;^{2}}$ **C.** $\dfrac{x^2+2x}{x+1\;^{2}}$ **D.** $\dfrac{-2x-2}{x-1\;^{2}}$

✍**Bài làm 4.** Ta có $y'=\dfrac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

Câu 5. $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $ac\neq 0$

A. $\dfrac{a}{c}$ **B.** $\dfrac{ad-bc}{cx+d\;^{2}}$ **C.** $\dfrac{ad+bc}{cx+d\;^{2}}$ **D.** $\dfrac{ad-bc}{cx+d}$

✍**Bài làm 5.** Ta có $y'=\dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2}=\dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$

Câu 6. $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$, $aa'\neq 0$.

A. $=\dfrac{aa'x^2+2ab'x+bb'-a'c}{(a'x+b')}$ **B.** $=\dfrac{aa'x^2+2ab'x+bb'-a'c}{(a'x+b')^2}$

C. $=\dfrac{aa'x^2-2ab'x+bb'-a'c}{(a'x+b')^2}$ **D.** $=\dfrac{aa'x^2+2ab'x-bb'-a'c}{(a'x+b')^2}$

✍**Bài làm 6.** Ta có: $y'=\dfrac{(2ax+b)(a'x+b')-a'(ax^2+bx+c)}{(a'x+b')^2}$

$$=\dfrac{aa'x^2+2ab'x+bb'-a'c}{(a'x+b')^2}.$$

Bài 2 Tính đạo hàm các hàm số sau

Câu 1. $y=x\sqrt{x^2+1}$

A. $\frac{2x^2+1}{2\sqrt{x^2+1}}$ **B.** $\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ **C.** $\frac{4x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ **D.** $\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

Bài làm 1. Ta có: $y'=x'\sqrt{x^2+1}+\left(\sqrt{x^2+1}\right)'x=\sqrt{x^2+1}+\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}.x$

$=\sqrt{x^2+1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Câu 2. $y=\frac{3}{(2x+5)^2}$

A. $-\frac{12}{(2x+5)^4}$ **B.** $\frac{12}{(2x+5)^3}$ **C.** $-\frac{6}{(2x+5)^3}$ **D.** $-\frac{12}{(2x+5)^3}$

Bài làm 2. Ta có: $y'=-\frac{3\left[(2x+5)^2\right]'}{(2x+5)^4}=-\frac{12(2x+5)}{(2x+5)^4}=-\frac{12}{(2x+5)^3}$

Câu 3. $y=\frac{2-2x+x^2}{x^2-1}$

A. $\frac{2x^2+6x+2}{(x^2-1)^2}$ **B.** $\frac{2x^2-6x+2}{(x^2-1)^4}$ **C.** $\frac{2x^2-6x-2}{(x^2-1)^2}$ **D.** $\frac{2x^2-6x+2}{(x^2-1)^2}$

Bài làm 3. Ta có $y'=\frac{(2x-2)(x^2-1)-2x(x^2-2x+2)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^2-6x+2}{(x^2-1)^2}$

Câu 4. $y=\sqrt{3x+2\tan x}$

A. $\frac{5+2\tan^2 x}{2\sqrt{3x+2\tan x}}$ **B.** $\frac{5-2\tan^2 x}{2\sqrt{3x+2\tan x}}$ **C.** $\frac{-5+2\tan^2 x}{2\sqrt{3x+2\tan x}}$ **D.** $\frac{-5-2\tan^2 x}{2\sqrt{3x+2\tan x}}$

Bài làm 4. Ta có: $y'=\frac{(3x+2\tan x)'}{2\sqrt{3x+2\tan x}}=\frac{3+2(1+\tan^2 x)}{2\sqrt{3x+2\tan x}}=\frac{5+2\tan^2 x}{2\sqrt{3x+2\tan x}}$

Câu 5. $y=\sin^2(3x+1)$

A. $3\sin(6x+2)$ **B.** $\sin(6x+2)$ **C.** $-3\sin(6x+2)$ **D.** $3\cos(6x+2)$

Bài làm 5. Ta có: $y'=2\sin(3x+1).\left[\sin(3x+1)\right]'=2\sin(3x+1).3\cos(3x+1)=3\sin(6x+2)$.

Câu 6. $y=(x+1)\sqrt{x^2+x+1}$.

A. $\frac{4x^2-5x+3}{2\sqrt{x^2+x+1}}$ **B.** $\frac{4x^2+5x-3}{2\sqrt{x^2+x+1}}$ **C.** $\frac{4x^2+5x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}$ **D.** $\frac{4x^2+5x+3}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

Bài làm 6. Ta có $y'=\sqrt{x^2+x+1}+(x+1)\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}=\dfrac{4x^2+5x+3}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

Bài 3. Tính đạo hàm các hàm số sau

Câu 1. $y=\left(x^7+x\right)^2$

A. $y'=(x^7+x)(7x^6+1)$ **B.** $y'=2(x^7+x)$

C. $y'=2(7x^6+1)$ **D.** $y'=2(x^7+x)(7x^6+1)$

Bài làm 1. Đáp án D

Câu 2. $y=\left(x^2+1\right)\left(5-3x^2\right)$

A. $y'=-x^3+4x$ **B.** $y'=-x^3-4x$ **C.** $y'=12x^3+4x$ **D.** $y'=-12x^3+4x$

Bài làm 2. Ta có: Đáp án D

Câu 3. $y=\dfrac{2x}{x^2-1}$

A. $\dfrac{2x^2-2}{(x^2-1)^2}$ **B.** $\dfrac{-2x^2+343}{(x^2-1)^2}$ **C.** $\dfrac{-2x^2-2}{(x^2+1)^2}$ **D.** $\dfrac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$

Bài làm $y'=\dfrac{2(x^2-1)-2x.2x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$

Câu 4. $y=x^2\left(2x+1\right)\left(5x-3\right)$

A. $y'=40x^2-3x^2-6x$ **B.** $y'=40x^3-3x^2-6x$ **C.** $y'=40x^3+3x^2-6x$ **D.** $y'=40x^3-3x^2-x$

Bài làm $y=10x^4-x^3-3x^2\Rightarrow y'=40x^3-3x^2-6x$

Câu 5. $y=\left(4x+\dfrac{5}{x^2}\right)^3$

A. $y'=3\left(4+\dfrac{10}{x^3}\right)\left(4x+\dfrac{5}{x^2}\right)^2$ **B.** $y'=3\left(4-\dfrac{10}{x^3}\right)\left(4x-\dfrac{5}{x^2}\right)^2$

C. $y'=\left(4x+\dfrac{5}{x^2}\right)^2$ **D.** $y'=3\left(4-\dfrac{10}{x^3}\right)\left(4x+\dfrac{5}{x^2}\right)^2$

Bài làm $y'=3\left(4-\dfrac{10}{x^3}\right)\left(4x+\dfrac{5}{x^2}\right)^2$

Câu 6. $y=(x+2)^3(x+3)^2$

A. $y'=3(x^2+5x+6)^3+2(x+3)(x+2)^3$ **B.** $y'=2(x^2+5x+6)^2+3(x+3)(x+2)^3$

C. $y'=3(x^2+5x+6)+2(x+3)(x+2)$ **D.** $y'=3(x^2+5x+6)^2+2(x+3)(x+2)^3$

Bài làm $y'=3(x^2+5x+6)^2+2(x+3)(x+2)^3$

Câu 7. $y=\sqrt{x^3-3x^2+2}$

A. $y'=\dfrac{3x^2-6x}{\sqrt{x^3-3x^2+2}}$ **B.** $y'=\dfrac{3x^2+6x}{2\sqrt{x^3-3x^2+2}}$ **C.** $y'=\dfrac{3x^2-6x}{2\sqrt{x^3-3x^2-2}}$ **D.** $y'=\dfrac{3x^2-6x}{2\sqrt{x^3-3x^2+2}}$

Bài làm $y'=\dfrac{3x^2-6x}{2\sqrt{x^3-3x^2+2}}$

Câu 8. $y=x^2+x\sqrt{x+1}$

A. $y'=2x+\sqrt{x+1}-\dfrac{x}{2\sqrt{x+1}}$ **B.** $y'=2x-\sqrt{x+1}+\dfrac{x}{2\sqrt{x+1}}$

C. $y'=\dfrac{x}{2\sqrt{x+1}}$ **D.** $y'=2x+\sqrt{x+1}+\dfrac{x}{2\sqrt{x+1}}$

Bài làm $y'=2x+\sqrt{x+1}+\dfrac{x}{2\sqrt{x+1}}$

Câu 9. $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

A. $y'=-\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$ **B.** $y'=\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$ **C.** $y'=\dfrac{2a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$ **D.** $y'=\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

Bài làm $y'=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{(a^2-x^2)}=\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

Câu 10. $y=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

A. $y'=\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}$ **B.** $y'=-\dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}$ **C.** $y'=\dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}$ **D.** $y'=-\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}$

Bài làm $y'=-\dfrac{(x\sqrt{x})'}{x^3}=-\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}$

Câu 11. $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$

A. $y'=\dfrac{1-3x}{\sqrt{(1-x)^3}}$ **B.** $y'=\dfrac{1-3x}{3\sqrt{(1-x)^3}}$ **C.** $y'=-\dfrac{1}{3}\dfrac{1-3x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$ **D.** $y'=\dfrac{1-3x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$

Bài làm $y'=\dfrac{\sqrt{1-x}-\dfrac{1+x}{2\sqrt{1-x}}}{1-x}=\dfrac{1-3x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$

Câu 12. $y=\sin^2 3x$

A. $y'=\sin 6x$ **B.** $y'=3\sin 3x$ **C.** $y'=2\sin 6x$ **D.** $y'=3\sin 6x$

Bài làm $y'=3\sin 6x$

Câu 13. $y=\sqrt{3\tan^2 x+\cot 2x}$

A. $y'=\dfrac{3\tan x(1+\tan^2 x)-(1+\cot^2 2x)}{3\sqrt{3\tan^2 x+\cot 2x}}$ **B.** $y'=\dfrac{3\tan x(1+\tan^2 x)-(1+\cot^2 2x)}{2\sqrt{3\tan^2 x+\cot 2x}}$

C. $y'=\dfrac{3\tan x(1+\tan^2 x)+(1+\cot^2 2x)}{\sqrt{3\tan^2 x+\cot 2x}}$ **D.** $y'=\dfrac{3\tan x(1+\tan^2 x)-(1+\cot^2 2x)}{\sqrt{3\tan^2 x+\cot 2x}}$

Bài làm $y'=\dfrac{3\tan x(1+\tan^2 x)-(1+\cot^2 2x)}{\sqrt{3\tan^2 x+\cot 2x}}$

Câu 14. $y=\sqrt[3]{x^3+\cos^4(2x-\frac{\pi}{3})}$

A. $y'=\dfrac{3x^2+8\cos^3(2x-\frac{\pi}{4})\sin(2x-\frac{\pi}{4})}{3\sqrt[3]{\left(x^3+\cos^4(2x-\frac{\pi}{3})\right)^3}}$ **B.** $y'=\dfrac{3x^2-8\cos^3(2x-\frac{\pi}{4})\sin(2x-\frac{\pi}{4})}{4\sqrt[3]{\left(x^3+\cos^4(2x-\frac{\pi}{3})\right)^3}}$

C. $y'=\dfrac{6x^2-8\cos^3(2x-\frac{\pi}{4})\sin(2x-\frac{\pi}{4})}{3\sqrt[3]{\left(x^3+\cos^4(2x-\frac{\pi}{3})\right)^3}}$ **D.** $y'=\dfrac{3x^2-8\cos^3(2x-\frac{\pi}{4})\sin(2x-\frac{\pi}{4})}{3\sqrt[3]{\left(x^3+\cos^4(2x-\frac{\pi}{3})\right)^3}}$

Bài làm $y'=\dfrac{3x^2-8\cos^3(2x-\frac{\pi}{4})\sin(2x-\frac{\pi}{4})}{3\sqrt[3]{\left(x^3+\cos^4(2x-\frac{\pi}{3})\right)^3}}$

Câu 15. $y=2\sin\ x^2+2$

A. $y'=x\cos(x^2+2)$ **B.** $y'=4\cos(x^2+2)$ **C.** $y'=2x\cos(x^2+2)$ **D.** $y'=4x\cos(x^2+2)$

Bài làm $y'=4x\cos(x^2+2)$

Câu 16. $y=\cos^2\ \sin^3 x$

A. $y'=-\sin(2\sin^3 x)\sin^2 x\cos x$

B. $y'=-6\sin(2\sin^3 x)\sin^2 x\cos x$

C. $y'=-7\sin(2\sin^3 x)\sin^2 x\cos x$

D. $y'=-3\sin(2\sin^3 x)\sin^2 x\cos x$

Bài làm $y'=-3\sin(2\sin^3 x)\sin^2 x\cos x$

Câu 17. $y=\dfrac{x}{\sin x}$

A. $y'=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin^2 x}$ **B.** $y'=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin x}$ **C.** $y'=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x}$ **D.** $y'=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}$

Bài làm $y'=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}$

Câu 18. $y=-\dfrac{\cos x}{3\sin^3 x}+\dfrac{4}{3}\cot x$

A. $y'=\cot^3 x-1$ **B.** $y'=3\cot^4 x-1$ **C.** $y'=\cot^4 x-1$ **D.** $y'=\cot^4 x$

Bài làm $y=-\dfrac{1}{3}\cot x(1+\cot^2 x)+\dfrac{4}{3}\cot x=-\dfrac{1}{3}\cot^3 x+\cot x$

Suy ra $y'=\cot^2 x(1+\cot^2 x)-1-\cot^2 x=\cot^4 x-1$

Câu 19. $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$

A. $f'(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$

B. $f'(x)=\begin{cases}3x^2\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$

C. $f'(x)=\begin{cases}3x^2\sin\dfrac{1}{x}+x\cos\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$

D. $f'(x)=\begin{cases}3x^2\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$

Bài làm $x\neq 0\Rightarrow f'(x)=3x^2\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x}$

Với $x=0\Rightarrow f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$

Vậy $f'(x)=\begin{cases}3x^2\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$.

Bài 4. Tính $\dfrac{f'\ 1}{\varphi'\ 0}$. Biết rằng : $f(x)=x^2$ và $\varphi(x)=4x+\sin\dfrac{\pi x}{2}$.

A. $\dfrac{f'(1)}{\varphi'(0)}=\dfrac{4}{8-\pi}$ **B.** $\dfrac{f'(1)}{\varphi'(0)}=\dfrac{2}{8+\pi}$ **C.** $\dfrac{f'(1)}{\varphi'(0)}=\dfrac{4}{\pi}$ **D.** $\dfrac{f'(1)}{\varphi'(0)}=\dfrac{4}{8+\pi}$

✍**Bài làm Bài 4.** $f'(x)=2x\Rightarrow f'(1)=2;\varphi'(x)=4+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\Rightarrow\varphi'(0)=4+\frac{\pi}{2}$

Suy ra $\frac{f'(1)}{\varphi'(0)}=\frac{4}{8+\pi}$.

Bài 6. Tìm m để các hàm số

Câu 1. $y=(m-1)x^3-3(m+2)x^2-6(m+2)x+1$ có $y'\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

A. $m\geq 3$ **B.** $m\geq 1$ **C.** $m\geq 4$ **D.** $m\geq 4\sqrt{2}$

✍**Bài làm 1.** Ta có: $y'=3\left[(m-1)x^2-2(m+2)x-2(m+2)\right]$

Do đó $y'\geq 0\Leftrightarrow(m-1)x^2-2(m+2)x-2(m+2)\geq 0$ (1)

- $m=1$ thì (1) $\Leftrightarrow -6x-6\geq 0\Leftrightarrow x\leq -1$ nên $m=1$ (loại)
- $m\neq 1$ thì (1) đúng với $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a=m-1>0\\\Delta'\leq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m>1\\(m+1)(4-m)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\geq 4$

Vậy $m\geq 4$ là những giá trị cần tìm.

Câu 2. $y=\frac{mx^3}{3}-mx^2+(3m-1)x+1$ có $y'\leq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

A. $m\leq\sqrt{2}$ **B.** $m\leq 2$ **C.** $m\leq 0$ **D.** $m<0$

✍**Bài làm 2.** Ta có: $y'=mx^2-2mx+3m-1$

Nên $y'\leq 0\Leftrightarrow mx^2-2mx+3m-1\leq 0$ (2)

- $m=0$ thì (1) trở thành: $-1\leq 0$ đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$
- $m\neq 0$, khi đó (1) đúng với $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a=m<0\\\Delta'\leq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\m(1-2m)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\1-2m\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow m<0$

Vậy $m\leq 0$ là những giá trị cần tìm.

Bài 7. Tính đạo hàm của các hàm số sau

Câu 1. $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\0 & \text{khi } x=0\end{cases}$

A. $f'(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\0 & \text{khi } x=0\end{cases}$

B. $f'(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\0 & \text{khi } x=0\end{cases}$

C. $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$ **D.** $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$

Bài làm 1. Với $x\neq 0$ ta có: $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

Tại $x=0$ ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

Vậy $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$.

Câu 2. $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1 \text{ khi } x\le 1\\ \sqrt{x-1}+3 \text{ khi } x>1\end{cases}$

A. $f'(x)=\begin{cases}2x & \text{khi } x<1\\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{khi } x>1\end{cases}$ **B.** $f'(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{khi } x<1\\ -\frac{1}{\sqrt{x-1}} & \text{khi } x>1\end{cases}$

C. $f'(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{khi } x<1\\ \frac{1}{\sqrt{x-1}} & \text{khi } x>1\end{cases}$ **D.** $f'(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{khi } x<1\\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{khi } x>1\end{cases}$

Bài làm 2. Với $x<1$ ta có: $f'(x)=2x+1$

Với $x>1$ ta có: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

Tại $x=1$ ta có:

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+x-2}{x-1}=3$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}=+\infty$ suy ra hàm số không có đạo hàm tại $x=1$

Vậy $f'(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{khi } x<1\\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{khi } x>1\end{cases}$.

Bài 8. Tìm a,b để các hàm số sau có đạo hàm trên $\mathbb{R}$

Câu 1. . $f(x)=\begin{cases}x^2-x+1 & \text{khi } x\le 1\\ -x^2+ax+b & \text{khi } x>1\end{cases}$

A. $\begin{cases}a=13\\ b=-1\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}a=3\\ b=-11\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}a=23\\ b=-21\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}a=3\\ b=-1\end{cases}$

Bài làm 1 Với $x\neq 1$ thì hàm số luôn có đạo hàm

Do đó hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ hàm số có đạo hàm tại $x=1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1;\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=a+b-1$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow a+b-1=1 \Leftrightarrow a+b=2$

Khi đó: $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=1;$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-x^2+ax+1-a}{x-1}=a-2$

Nên hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thì $\begin{cases} a+b=2 \\ a-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}$.

Câu 2. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x+1}{x+1} & \text{khi } x\ge 0 \\ x^2+ax+b & \text{khi } x<0 \end{cases}$.

A. $a=0,b=11$ **B.** $a=10,b=11$ **C.** $a=20,b=21$ **D.** $a=0,b=1$

Bài làm 2. Tương tự như ý 1. **ĐS:** $a=0,b=1$.

Bài 9. Tính đạo hàm các hàm số sau

Câu 1. $y=(x^3+2x)^3$

A. $y'=(x^3+2x)^2(3x^2+2)$ **B.** $y'=2(x^3+2x)^2(3x^2+2)$

C. $y'=3(x^3+2x)^2+(3x^2+2)$ **D.** $y'=3(x^3+2x)^2(3x^2+2)$

Bài làm 1. Ta có: $y'=3(x^3+2x)^2\ \left(x^3+2x\right)'=3(x^3+2x)^2(3x^2+2)$

Câu 2. $y=(x^2-1)(3x^3+2x)$

A. $y'=x^4-3x^2-2$ **B.** $y'=5x^4-3x^2-2$ **C.** $y'=15x^4-3x^2$ **D.** $y'=15x^4-3x^2-2$

Bài làm 2. Ta có: $y'=2x(3x^3+2x)+(x^2-1)(9x^2+2)=15x^4-3x^2-2$

Câu 3. $y=\left(x+\dfrac{2}{3x^2}\right)^2$

A. $y'=\left(x+\dfrac{2}{3x^2}\right)\left(1-\dfrac{4}{3x^3}\right)$ **B.** $y'=2\left(x+\dfrac{2}{3x^2}\right)\left(1+\dfrac{4}{3x^3}\right)$

C. $y'=\left(x+\dfrac{2}{3x^2}\right)\left(1+\dfrac{4}{3x^3}\right)$ **D.** $y'=2\left(x+\dfrac{2}{3x^2}\right)\left(1-\dfrac{4}{3x^3}\right)$

Bài làm 3. Ta có: $y'=2\left(x+\dfrac{2}{3x^2}\right)\left(1-\dfrac{4}{3x^3}\right)$

Câu 4. $y=2\sin^3 2x+\tan^2 3x+x\cos 4x$

A. $y'=12\sin^2 2x\cos 2x+6\tan 3x\ \ 1+2\tan^2 3x\ \ +\cos 4x-4x\sin 4x$

B. $y'=12\sin^2 2x\cos 2x+6\tan 3x\ \ 1+\tan^2 3x\ \ +\cos 4x-x\sin 4x$

C. $y'=12\sin^2 2x\cos 2x+\tan 3x\ \ 1-\tan^2 3x\ \ +\cos 4x-4x\sin 4x$

D. $y'=12\sin^2 2x\cos 2x+6\tan 3x\ \ 1+\tan^2 3x\ \ +\cos 4x-4x\sin 4x$

✍**Bài làm 4.** Ta có: $y'=12\sin^2 2x\cos 2x+6\tan 3x\ \ 1+\tan^2 3x\ \ +\cos 4x-4x\sin 4x$

Câu 5. $y=\dfrac{\sin 2x}{x}-\dfrac{x}{\cos 3x}$

A. $y'=\dfrac{2x\cos 2x+\sin 2x}{x^2}-\dfrac{\cos 3x+3x\sin 3x}{\cos^2 3x}$

B. $y'=\dfrac{2x\cos 2x+\sin 2x}{x^2}+\dfrac{\cos 3x+3x\sin 3x}{\cos^2 3x}$

C. $y'=\dfrac{2x\cos 2x-\sin 2x}{x^2}-\dfrac{\cos 3x+3x\sin 3x}{\cos^2 3x}$

D. $y'=\dfrac{2x\cos 2x-\sin 2x}{x^2}+\dfrac{\cos 3x+3x\sin 3x}{\cos^2 3x}$

✍**Bài làm 5.** Ta có: $\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)'=\dfrac{2x\cos 2x-\sin 2x}{x^2}$, $\left(\dfrac{x}{\cos 3x}\right)'=\dfrac{\cos 3x+3x\sin 3x}{\cos^2 3x}$

Nên $y'=\dfrac{2x\cos 2x-\sin 2x}{x^2}-\dfrac{\cos 3x+3x\sin 3x}{\cos^2 3x}$.

Câu 6. $y=x\sin 2x+\sqrt{x^3+x^2+1}$

A. $y'=\sin 2x-2x\cos 2x+\dfrac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^3+x^2+1}}$

B. $y'=\sin 2x+2x\cos 2x+\dfrac{3x^2+2x}{\sqrt{x^3+x^2+1}}$

C. $y'=\sin 2x+2x\cos 2x-\dfrac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^3+x^2+1}}$

D. $y'=\sin 2x+2x\cos 2x+\dfrac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^3+x^2+1}}$

✍**Bài làm 6.**Ta có: $y'=\sin 2x+2x\cos 2x+\dfrac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^3+x^2+1}}$

Câu 7. $y=\sqrt{2\sin^2 x+x^3+1}$

A. $y'=\dfrac{2\sin 2x+3x^2}{\sqrt{2\sin^2 x+x^3+1}}$

B. $y'=\dfrac{2\sin 2x+3x^2}{2\sqrt{2\sin^2 x+x^3+1}}$

C. $y'=\dfrac{\sin 2x+3x^2}{\sqrt{2\sin^2 x+x^3+1}}$

D. $y'=\dfrac{2\sin 2x-3x^2}{2\sqrt{2\sin^2 x+x^3+1}}$

✍**Bài làm 7.** Ta có: $y'=\dfrac{2\sin 2x+3x^2}{2\sqrt{2\sin^2 x+x^3+1}}$

Câu 8. $y=\sqrt{\sqrt{x^2+1}+2x-1}$

A. $y'=\dfrac{x+2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{(x^2+1)\ \sqrt{x^2+1}+2x-1}}$

B. $y'=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{(x^2+1)\ \sqrt{x^2+1}+2x-1}}$

C. $y'=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{(x^2+1)\ \sqrt{x^2+1}+2x-1}}$

D. $y'=\dfrac{x+2\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{(x^2+1)\ \sqrt{x^2+1}+2x-1}}$

Bài làm 8. Ta có: $y'=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+2}{2\sqrt{\sqrt{x^2+1}+2x-1}}=\dfrac{x+2\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{(x^2+1)\ \sqrt{x^2+1}+2x-1}}$.

Câu 9. $y=x\tan 2x+\dfrac{x+1}{\cot x}$

A. $y'=\tan 2x-2x\ \ 1+\tan^2 2x\ \ +\tan x+(x+1)(\tan^2+1)$

B. $y'=\tan 2x+x\ \ 1+\tan^2 2x\ \ +\tan x+(x+1)(\tan^2+1)$

C. $y'=\tan 2x+2x\ \ 1+\tan^2 2x\ \ +\tan x+2(x+1)(\tan^2+1)$

D. $y'=\tan 2x+2x\ \ 1+\tan^2 2x\ \ +\tan x+(x+1)(\tan^2+1)$

Bài làm 9. Ta có: $x\tan 2x\ ^{'}=\tan 2x+2x\ \ 1+\tan^2 2x$

$\left(\dfrac{x+1}{\cot x}\right)'=\left[(x+1)\tan x\right]'=\tan x+(x+1)(\tan^2+1)$

Nên $y'=\tan 2x+2x\ \ 1+\tan^2 2x\ \ +\tan x+(x+1)(\tan^2+1)$

Câu 10. $y=\sqrt{\sin^3\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1}$

A. $y'=\dfrac{3\sin^2\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{2\sqrt{\sin^3\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1}}$

B. $y'=\dfrac{\sin^2\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{2\sqrt{\sin^3\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1}}$

C. $y'=\dfrac{\sin^2\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{\sin^3\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1}}$

D. $y'=\dfrac{3\sin^2\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{\sin^3\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1}}$

Bài làm 10. Ta có: $y'=\dfrac{3\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{\sin^3\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1}}$.

Bài 10. Giải bất phương trình :

Câu 1. $f'(x)\ge 0$ với $f(x)=2x^3-3x^2+1$

A. $\left[\begin{array}{l}x\le 0\\x\ge 1\end{array}\right.$ **B.** $x\le 1$ **C.** $x\ge 0$ **D.** $0\le x\le 1$

Bài làm 1. TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $f'(x)=6x^2-6x$, suy ra $f'(x)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le 0\\x\ge 1\end{array}\right.$

Câu 2. $f'(x)<0$ với $f(x)=-2x^4+4x^2+1$

A. $\left[\begin{array}{l}-1<x<0\\x>1\end{array}\right.$ **B.** $-1<x<0$

C. $x>1$ **D.** $x<0$

Bài làm 2. TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $f'(x)=-8x^3+8x$, suy ra $f'(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<0\\x>1\end{array}\right.$

Câu 3. $2xf'(x)-f(x)\ge 0$ với $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$

A. $x\ge\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **B.** $x>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **C.** $x<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **D.** $x\ge\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Bài làm 3. TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

Mặt khác: $f(x)>x+\sqrt{x^2}=x+|x|\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Nên $2xf'(x)-f(x)\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{2xf(x)}{\sqrt{x^2+1}}-f(x)\ge 0$

$\Leftrightarrow 2x\ge\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\3x^2\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 4. $f'(x)>0$ với $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$.

A. $-2\le x\le\sqrt{2}$ **B.** $x\le\sqrt{2}$ **C.** $-2\le x$ **D.** $x<0$

Bài làm 4. TXĐ: $D=[-2;2]$

Ta có: $f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}\Rightarrow f'(x)>0\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}>x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\le x<0 \\ \begin{cases} x\ge 0 \\ 4-x^2>x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\le x<0 \\ 0\le x<\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow -2\le x<\sqrt{2}.$$

Vấn đề 2. Sử dụng đạo hàm để tìm giới hạn

Từ định nghĩa đạo hàm $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,ta thấy có thể sử dụng đạo hàm để tìm giới hạn của hàm số. Cụ thể

- Để tính $A=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{x-x_0}$, biết $g(x_0)=0$.

Ta viết $g(x)=f(x)-f(x_0)$. Khi đó nếu $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì :

$$A=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0).$$

- Để tính: $B=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{F(x)}{G(x)}$, biết $F(x_0)=G(x_0)=0$.

Ta viết $F(x)=f(x)-f(x_0)$ và $G(x)=g(x)-g(x_0)$.

Nếu hai hàm số $f(x),g(x)$ có đạo hàm tại $x=x_0$ và $g'(x_0)\neq 0$ thì: $B=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tính các giới hạn sau :

1. $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-1}{x}$

2. $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt{3x-2}}{x^2-1}$

3. $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+3x}-1}{x}$

4. $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$

Lời giải.

1. Đặt $f(x)=\sqrt[3]{1-x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}$ và $f(0)=1$

$\Rightarrow A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=-\dfrac{1}{3}$.

2. Đặt $f(x)=\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt{3x-2}$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{3.\sqrt[3]{(2x-1)^2}}-\dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}$ và $f(1)=0$.

$\Rightarrow B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}.\dfrac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}.\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-1}=\dfrac{1}{2}.f'(1)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{5}{9}$.

3. Đặt $f(x)=\sqrt[n]{1+3x}\Rightarrow C=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=\frac{3}{n}$.

4. Đặt $f(x)=\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x}{3.\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}+\frac{1}{2.\sqrt[4]{(1-2x)^3}}$

$\Rightarrow D=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x+1}.\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 2. Tính giới hạn sau : $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x^2}-\sqrt[3]{1+3x^2}}{1-\cos x}$

Lời giải.

Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{1+2x^2}-\sqrt[3]{1+3x^2}}{x^2}}{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}$.

Mà $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$.

Đặt $t=x^2\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+2t}-\sqrt[3]{1+3t}}{t}=0$.

Vậy $A=0$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Tìm các giới hạn sau

Câu 1. $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+3x)^3-(1-4x)^4}{x}$

A.25 **B.26** **C.27** **D.28**

Bài làm 1 Xét hàm số $f(x)=(1+3x)^3-(1-4x)^4\Rightarrow A=f'(0)=25$

Câu 2. $B=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

A.6 **B.4** **C.3** **D.2**

Bài làm 2. Xét hàm số $f(x)=(1+x)(1+2x)(1+3x)-1\Rightarrow B=f'(0)=6$

Câu 3. $C=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{\sqrt[m]{1+bx}-1}$ $(m,n\in\mathbb{N};a.b\neq 0)$

A. $C=\frac{a}{b}$ **B.** $C=\frac{m}{n}$ **C.** $C=\frac{m+a}{n+b}$ **D.** $C=\frac{ma}{nb}$

Bài làm 3. Xét hai hàm số $f(x)=\sqrt[n]{1+ax}-1, g(x)=\sqrt[m]{1+bx}-1$

Suy ra $C=\frac{f'(0)}{g'(0)}=\frac{ma}{nb}$.

Câu 4. $D=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-x}{x^2-1}$

A.0 **B.**1 **C.**2 **D.**3

Bài làm 4. Xét hàm số $f(x)=\sqrt{2x-1}-x\Rightarrow D=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}.f'(1)=0$

Bài 2 Tìm các giới hạn sau

Câu 1. $A=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{1-\sqrt{2-x^2}}$

A. $\frac{2}{3}$ **B.**1 **C.**2 **D.** $\frac{3}{2}$

Bài làm 1. Đặt $f(x)=\sqrt[3]{2x-1}-1\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3.\sqrt[3]{(2x-1)^2}}\Rightarrow f'(1)=\frac{2}{3}$

và $g(x)=1-\sqrt{2-x^2}\Rightarrow g'(x)=\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}\Rightarrow g'(1)=1$.

Khi đó: $A=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{g(x)-g(1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\frac{g(x)-g(1)}{x-1}}=\frac{f'(1)}{g'(1)}=\frac{2}{3}$.

Câu 2. $B=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}$

A.1 **B.**2 **C.**3 **D.**4

Bài làm 2. Đặt $f(x)=\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}-\frac{2x}{3.\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$.

$\Rightarrow f'(0)=1$. Và $g(x)=\sin x\Rightarrow g'(x)=\cos x\Rightarrow g'(0)=1$.

Khi đó: $B=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}}{\frac{g(x)-g(0)}{x}}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=1$.

Câu 3. $C=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{26x^3+1}-\sqrt[4]{80x^4+1}}{\sqrt{x}-1}$

A. $\frac{-4}{27}$ **B.**1 **C.**2 **D.** $\frac{4}{27}$

Bài làm 3. Đặt $g(x)=\sqrt{x}-1\Rightarrow g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow g'(1)=\dfrac{1}{2}$ và

$f(x)=\sqrt[3]{26x^3+1}-\sqrt[4]{80x^4+1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{26}{\sqrt[3]{(26x^3+1)^2}}-\dfrac{80x^3}{\sqrt[4]{(80x^4+1)^3}}$

$\Rightarrow f'(1)=\dfrac{-2}{27}$.

Khi đó: $C=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}}=\dfrac{f'(1)}{g'(1)}=-\dfrac{4}{27}$.

Câu 4. $E=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{4-2x+x^2}-\sqrt[3]{4+2x+x^2}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$

A. $\dfrac{\sqrt[3]{4}.\sqrt{2}}{3}$ **B.** $-\dfrac{\sqrt[3]{4}.\sqrt{2}}{3}$ **C.** $-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$ **D.**1

Bài làm 4. Xét hai hàm số $f(x)=\sqrt[3]{4-2x+x^2}-\sqrt[3]{4+2x+x^2}$

$g(x)=\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}$

Ta có: $E=\dfrac{f'(0)}{g'(0)}=-\dfrac{\sqrt[3]{4}.\sqrt{2}}{3}$.

Vấn đề 3. Đạo hàm cấp vao và vi phân

Phương pháp:

Vi phân của hàm số

- Tích $f'(x_0).\Delta x$ được gọi là vi phân của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 (ứng với số gia Δx) được kí hiệu là $df(x_0)=f'(x_0)\Delta x$.
- Nếu hàm số f có đạo hàm f' thì tích $f'(x)\Delta x$ được gọi là vi phân hàm số $y=f(x)$, kí hiệu là: $df(x)=f'(x)\Delta x$.

Đặc biệt: $dx=x'\Delta x=\Delta x$ nên ta viết $df(x)=f'(x)dx$.

Đạo hàm cấp n

- **Đạo hàm cấp hai:** Cho hàm số f có đạo hàm f'. Nếu f' cũng có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp hai của f và được kí hiệu là: f'', tức là: $f''=(f')'$.
- **Đạo hàm cấp n:** Cho hàm số f có đạo hàm cấp $n-1$ (với $n\in\mathbb{N}, n\ge 2$) là $f^{(n-1)}$. Nếu $f^{(n-1)}$ cũng có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của f và được kí hiệu là $f^{(n)}$, tức là:

$$f^{(n)}=(f^{(n-1)})'.$$

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tính đạo hàm cấp n của hàm số sau: $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$

Lời giải.

Ta có: $y'=\frac{-7}{(x-2)^2}$, $y''=\frac{7.2}{(x-2)^3}$, $y'''=\frac{-7.2.3}{(x-2)^4}$

Bằng quy nạp ta chứng minh: $y^{(n)}=\frac{(-1)^n.7.n!}{(x-2)^{n+1}}$ (2)

- Với $n=1$ ta thấy (2) đúng
- Giả sử (2) đúng với $n=k$, tức là: $y^{(k)}=\frac{(-1)^k.7.k!}{(x-2)^{k+1}}$

Ta có: $y^{(k+1)}=\left(\frac{(-1)^k.7.k!}{(x-2)^{k+1}}\right)'=-\frac{(-1)^k.7.k!.(k+1)}{(x-2)^{k+2}}$

$=\frac{(-1)^{k+1}.7.(k+1)!}{(x-2)^{k+2}}$

Nên (2) đúng với mọi số tự nhiên n.

Ví dụ 2. Cho đa thức $f(x)=x^3-5x^2+1$. Viết $f(x)$ dưới dạng lũy thừa của $x-2$

Lời giải.

Ta có: $f(x)=\frac{f^{(3)}(2)}{3!}(x-2)^3+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f'(2)}{1!}(x-2)+f(2)$

Mà $f'(x)=3x^2-10x, f''(x)=6x-10, f'''(x)=6$

Nên $f(x)=(x-2)^3+(x-2)^2-8(x-2)-11$.

Ví dụ 3. Tìm vi phân của của hàm số:

1. $y=x^4-2x+1$

2. $y=(x^3+2)(x+1)$

3. $y=\frac{2x^2-6x+5}{2x+4}$

4. $y=\sin 3x\cos 5x$

5. $y=\sqrt{4x^2+\tan x}$

Lời giải.

1. Ta có $dy=(x^4-2x+1)'dx=(4x^3-2)dx$

2. Ta có $y=x^4+x^3+2x+1\Rightarrow dy=(4x^3+3x^2+2)dx$

3. Ta có $y'=\frac{(4x-6)(2x+4)-2(2x^2-6x+5)}{(2x+4)^2}=\frac{4x^2+16x-34}{(2x+4)^2}$

Suy ra $dy=\frac{4x^2+16x-34}{(2x+4)^2}dx$.

4. Ta có $y=\frac{1}{2}\sin 8x-\frac{1}{2}\sin 2x\Rightarrow dy=\ \ 4\cos 8x-\cos 2x\ \ dx$

5. Ta có: $y'=\frac{8x+1+\tan^2 x}{2\sqrt{4x^2+\tan x}}\Rightarrow dy=\frac{8x+1+\tan^2 x}{2\sqrt{4x^2+\tan x}}dx$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho hàm số $y=\sin 2x$

Câu 1. Tính y''

A. $y''=-\sin 2x$ **B.** $y''=-4\sin x$ **C.** $y''=\sin 2x$ **D.** $y''=-4\sin 2x$

Bài làm 1. Ta có $y'=2\cos 2x\Rightarrow y''=-4\sin 2x$

Câu 2. Tính $y'''(\frac{\pi}{3})$, $y^{(4)}(\frac{\pi}{4})$

A. 4 và 16 **B.** 5 và 17 **C.** 6 và 18 **D.** 7 và 19

Bài làm 2. Ta có $y'''=-8\cos 2x,\ y^{(4)}=16\sin 2x$

Suy ra $y'''(\frac{\pi}{3})=-8\cos\frac{2\pi}{3}=4;\ y^{(4)}(\frac{\pi}{4})=16\sin\frac{\pi}{2}=16$.

Câu 3. Tính $y^{(n)}$

A. $y^{(n)}=2^n\sin(2x+n\frac{\pi}{3})$ **B.** $y^{(n)}=2^n\sin(2x+\frac{\pi}{2})$

C. $y^{(n)}=2^n\sin(x+\frac{\pi}{2})$ **D.** $y^{(n)}=2^n\sin(2x+n\frac{\pi}{2})$

Bài làm 3. Ta có $y'=2\sin(2x+\frac{\pi}{2}), y''=2^2\sin(2x+2\frac{\pi}{2})$, $y'''=2^3\sin(2x+3\frac{\pi}{2})$

Bằng quy nạp ta chứng minh $y^{(n)}=2^n\sin(2x+n\frac{\pi}{2})$

Với $n=1\Rightarrow y'=2^1\sin(2x+\frac{\pi}{2})$ đúng

Giả sử $y^{(k)}=2^k\sin(2x+k\frac{\pi}{2})$,

suy ra $y^{(k+1)}=\left(y^{(k)}\right)'=2^{k+1}\cos(2x+k\frac{\pi}{2})=2^{k+1}\sin\left(2x+(k+1)\frac{\pi}{2}\right)$

Theo nguyên lí quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Bài 2. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau

Câu 1. $y=\frac{2x+1}{x+2}$

A. $y^{(n)}=\frac{(1)^{n-1}.3.n!}{(x+2)^{n+1}}$ **B.** $y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}.n!}{(x+2)^{n+1}}$

C. $y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}.3.n!}{(x-2)^{n+1}}$ **D.** $y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}.3.n!}{(x+2)^{n+1}}$

Bài làm 1. Ta có $y'=\frac{3}{(x+2)^2}, y''=-\frac{3\left[(x+2)^2\right]'}{(x+2)^4}=\frac{-3.2}{(x+2)^3}$

$y''' = \dfrac{3.2.3}{(x+2)^4}$. Ta chứng minh $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}.3.n!}{(x+2)^{n+1}}$

- Với $n=1 \Rightarrow y' = \dfrac{(-1)^0.3}{(x+2)^2} = \dfrac{3}{(x+2)^2}$ đúng
- Giả sử $y^{(k)} = \dfrac{(-1)^{k-1}.3.k!}{(x+2)^{k+1}}$

$\Rightarrow y^{(k+1)} = \left(y^{(k)}\right)' = -\dfrac{(-1)^{k-1}.3.k!.\left[(x+2)^{k+1}\right]'}{(x+2)^{2k+2}} = \dfrac{(-1)^k.3.(k+1)!}{(x+2)^{k+2}}$

Theo nguyên lí quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Câu 2. $y = \dfrac{1}{ax+b}, a \neq 0$

A. $y^{(n)} = \dfrac{(2)^n.a^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}$ **B.** $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.a^n.n!}{(x+1)^{n+1}}$ **C.** $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}$ **D.** $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.a^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}$

Bài làm 2. Ta có $y' = \dfrac{-a}{(ax+b)^2}, y'' = \dfrac{a^2.2}{(ax+b)^3}, y''' = \dfrac{-a^3.2.3}{(ax+b)^4}$

Ta chứng minh: $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.a^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}$

- Với $n=1 \Rightarrow y' = \dfrac{(-1)^1.a^1.1!}{(ax+b)^2} = -\dfrac{a}{(ax+b)^2}$ đúng
- Giả sử $y^{(k)} = \dfrac{(-1)^k.a^k.k!}{(ax+b)^{k+1}}$

$\Rightarrow y^{(k+1)} = \left(y^{(k)}\right)' = -\dfrac{(-1)^k.a^k.k!.\left[(ax+b)^{k+1}\right]'}{(ax+b)^{2k+2}} = \dfrac{(-1)^{k+1}.a^{k+1}.(k+1)!}{(x+2)^{k+2}}$

Theo nguyên lí quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Câu 3. $y = \dfrac{2x+1}{x^2-5x+6}$

A. $y^{(n)} = \dfrac{(2)^n.7.n!}{(x-2)^{n+1}} - \dfrac{(1)^n.5.n!}{(x-3)^{n+1}}$ **B.** $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n+1}.7.n!}{(x-2)^{n+1}} - \dfrac{(-1)^{n+1}.5.n!}{(x-3)^{n+1}}$

C. $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.7.n!}{(x-2)^n} - \dfrac{(-1)^n.5.n!}{(x-3)^n}$ **D.** $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.7.n!}{(x-2)^{n+1}} - \dfrac{(-1)^n.5.n!}{(x-3)^{n+1}}$

Bài làm 3. Ta có: $2x+1 = 7(x-2)-5(x-3)$; $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$

Suy ra $y = \dfrac{7}{x-3} - \dfrac{5}{x-2}$.

Mà $\left(\dfrac{1}{x-2}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.1^n.n!}{(x-2)^{n+1}} = \dfrac{(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}}, \left(\dfrac{1}{x-2}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.n!}{(x-3)^{n+1}}$

Nên $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n.7.n!}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{(-1)^n.5.n!}{(x-3)^{n+1}}$.

Câu 4. $y=\cos 2x$

A. $y^{(n)}= -1^{\ n}\cos\left(2x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$

B. $y^{(n)}=2^n\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

C. $y^{(n)}=2^{n+1}\cos\left(2x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$

D. $y^{(n)}=2^n\cos\left(2x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$

Bài làm 4. Ta có $y'=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right), y''=2^2\cos\left(2x+2\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$y'''=2^3\cos\left(2x+3\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $y^{(n)}=2^n\cos\left(2x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Câu 5. $y=\sqrt{2x+1}$

A. $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n+1}.3.5...(3n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n-1}}}$

B. $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}.3.5...(2n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n-1}}}$

C. $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n+1}.3.5...(2n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n+1}}}$

D. $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n+1}.3.5...(2n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n-1}}}$

Bài làm 5. Ta có $y'=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}, y''=-\dfrac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}, y'''=\dfrac{3}{\sqrt{(2x+1)^5}}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được: $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n+1}.3.5...(2n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n-1}}}$

Câu 6. $y=\dfrac{2x+1}{x^2-3x+2}$

A. $y^{(n)}=\dfrac{5.(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}}+\dfrac{3.(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}$

B. $y^{(n)}=\dfrac{5.(-1)^n.n!}{(x+2)^{n+1}}-\dfrac{3.(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}$

C. $y^{(n)}=\dfrac{5.(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}}:\dfrac{3.(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}$

D. $y^{(n)}=\dfrac{5.(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{3.(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}$

Bài làm 6. Ta có: $y=\dfrac{5}{x-2}-\dfrac{3}{x-1}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được: $y^{(n)}=\dfrac{5.(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{3.(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}$.

Bài 4. Tìm vi phân của các hàm số sau

Câu 1. $y = x^3 + 2x^2$

A. $dy = (3x^2 - 4x)dx$ **B.** $dy = (3x^2 + x)dx$ **C.** $dy = (3x^2 + 2x)dx$ **D.** $dy = (3x^2 + 4x)dx$

Bài làm 1. $dy = (3x^2 + 4x)dx$

Câu 2. $y = \sqrt{3x+2}$

A. $dy = \dfrac{3}{\sqrt{3x+2}}dx$ **B.** $dy = \dfrac{1}{2\sqrt{3x+2}}dx$ **C.** $dy = \dfrac{1}{\sqrt{3x+2}}dx$ **D.** $dy = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+2}}dx$

Bài làm 2. $dy = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+2}}dx$

Câu 3. $y = \sin 2x + \sin^3 x$

A. $dy = \ \cos 2x + 3\sin^2 x \cos x \ dx$ **B.** $dy = \ 2\cos 2x + 3\sin^2 x \cos x \ dx$

C. $dy = \ 2\cos 2x + \sin^2 x \cos x \ dx$ **D.** $dy = \ \cos 2x + \sin^2 x \cos x \ dx$

Bài làm 3. $dy = \ 2\cos 2x + 3\sin^2 x \cos x \ dx$

Câu 4. $y = \tan 2x$

A. $dy = (1 + \tan^2 2x)dx$ **B.** $dy = (1 - \tan^2 2x)dx$

C. $dy = 2(1 - \tan^2 2x)dx$ **D.** $dy = 2(1 + \tan^2 2x)dx$

Bài làm 4. $dy = 2(1 + \tan^2 2x)dx$

Câu 5. $y = \sqrt[3]{x+1}$

A. $dy = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}dx$ **B.** $dy = \dfrac{3}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}dx$ **C.** $dy = \dfrac{2}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}dx$ **D.** $dy = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}dx$

Bài làm 5. $dy = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}dx$

Câu 6. $y = (3x+1)^{10}$

A. $dy = 10(3x+1)^9 dx$ **B.** $dy = 30(3x+1)^{10} dx$ **C.** $dy = 9(3x+1)^{10} dx$ **D.** $dy = 30(3x+1)^9 dx$

Bài làm 6. $dy = 30(3x+1)^9 dx$ **.**

Bài 6. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau

Câu 1. $y = \dfrac{x}{x^2 + 5x + 6}$

A. $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.3.n!}{(x+3)^{n+1}} + \dfrac{(-1)^n.2.n!}{(x+2)^{n+1}}$ **B.** $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.3.n!}{(x+3)^n} - \dfrac{(-1)^n.2.n!}{(x+2)^n}$

C. $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.3.n!}{(x+3)^{n-1}} - \dfrac{(-1)^n.2.n!}{(x+2)^{n-1}}$ **D.** $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.3.n!}{(x+3)^{n+1}} - \dfrac{(-1)^n.2.n!}{(x+2)^{n+1}}$

Bài làm 1. Ta có: $x = 3(x+2) - 2(x+3)$; $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$

Suy ra $y = \dfrac{3}{x+3} - \dfrac{2}{x+2}$.

Mà $\left(\dfrac{1}{x+2}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n.1^n.n!}{(x+2)^{n+1}}=\dfrac{(-1)^n.n!}{(x+2)^{n+1}}$, $\left(\dfrac{1}{x+3}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n.n!}{(x+)^{n+1}}$

Nên ta có: $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n.3.n!}{(x+3)^{n+1}}-\dfrac{(-1)^n.2.n!}{(x+2)^{n+1}}$.

Câu 2. $y=\cos 2x$

A. $y^{(n)}=2^{n+1}\cos\left(2x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$ **B.** $y^{(n)}=2^{n-1}\cos\left(2x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$

C. $y^{(n)}=2^{n}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ **D.** $y^{(n)}=2^{n}\cos\left(2x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$

Bài làm 2. Ta có :

$y'=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right), y''=2^2\cos\left(2x+2\dfrac{\pi}{2}\right), y'''=2^3\cos\left(2x+3\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $y^{(n)}=2^n\cos\left(2x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

ĐẠO HÀM TỔNG HỢP

Bài 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

Câu 1: $y=\left(\dfrac{1}{2}x^5+\dfrac{2}{3}x^4-x^3-\dfrac{3}{2}x^2+4x-5\right)$

A. $y'=\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{8}{3}x^3-3x^2-3x+4.$ **B.** $y'=\dfrac{5}{2}x^4+\dfrac{2}{3}x^3-3x^2-3x+4.$

C. $y'=\dfrac{5}{2}x^4+\dfrac{8}{3}x^3-x^2-3x+4.$ **D.** $y'=\dfrac{5}{2}x^4+\dfrac{8}{3}x^3-3x^2-3x+4.$

Bài làm: $y'=\left(\dfrac{1}{2}x^5+\dfrac{2}{3}x^4-x^3-\dfrac{3}{2}x^2+4x-5\right)' \Leftrightarrow y'=\left(\dfrac{1}{2}x^5\right)'+\left(\dfrac{2}{3}x^4\right)'-\left(x^3\right)'-\left(\dfrac{3}{2}x^2\right)'+\left(4x\right)'-5'$

$y'=\dfrac{5}{2}x^4+\dfrac{8}{3}x^3-3x^2-3x+4.$

Câu 2: $y=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}x+x^2-0,5x^4$

A. $y'=-\dfrac{1}{3}+x-2x^3.$ **B.** $y'=-\dfrac{1}{3}+2x-x^3.$ **C.** $y'=\dfrac{1}{3}+x-2x^3.$ **D.** $y'=-\dfrac{1}{3}+2x-2x^3.$

Bài làm $y'=\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}x+x^2-0,5x^4\right)'$

$\Leftrightarrow y'=\left(\dfrac{1}{4}\right)'-\left(\dfrac{1}{3}x\right)'+\left(x^2\right)'-\left(0,5x^4\right)'$

$\Leftrightarrow y'=-\dfrac{1}{3}+2x-2x^3.$

Câu 3: $y = 2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} - 5$

A. $y' = 8x^3 + x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$. **B.** $y' = 8x^3 - x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$. **C.** $y' = 2x^3 - x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$. **D.** $y' = 8x^3 - x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Bài làm $y' = \left(2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} - 5\right)' \Leftrightarrow y' = \ 2x^4\ ' - \left(\frac{1}{3}x^3\right)' + \ 2\sqrt{x}\ ' - 5' \Leftrightarrow y' = 8x^3 - x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Câu 4: $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2 - x + a$ (a là hằng số)

A. $y' = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 1$ **B.** $y' = 4x^3 - x^2 + x - 1$ **C.** $y' = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x - 1$ **D.** $y' = x^3 - x^2 + x - 1$

Bài làm $y' = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2 - x + a\right)' \Leftrightarrow y' = x^3 - x^2 + x - 1$.

Câu 5: $y = \frac{3}{x^2} - \sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

A. $\frac{6}{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}$. **B.** $\frac{6}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$. **C.** $\frac{-6}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$. **D.** $\frac{-6}{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}$.

Bài làm $y' = \left(\frac{3}{x^2} - \sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)' \Leftrightarrow y' = \ 3.x^{-2}\ ' - \ \sqrt{x}\ ' + \frac{2}{3}\ x\sqrt{x}\ '$

$\Leftrightarrow y' = 3.\ -2\ .x^{-3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{3}\left(x'.\sqrt{x} + \ \sqrt{x}\ '.x\right) \Leftrightarrow y' = \frac{-6}{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.x\right)$

$\Leftrightarrow y' = \frac{-6}{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}\right) = \frac{-6}{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}$.

Câu 6: $y = 2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} - 5$

A. $y' = 2x^3 - x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$. **B.** $y' = x^3 - x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$. **C.** $y' = 8x^3 - 3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$. **D.** $y' = 8x^3 - x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Bài làm $y' = \left(2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} - 5\right)' \Leftrightarrow y' = \ 2x^4\ ' - \left(\frac{1}{3}x^3\right)' + \ 2\sqrt{x}\ ' - 5' \Leftrightarrow y' = 8x^3 - x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Câu 7: $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3\sqrt{x}$

A. $y' = 4x^4 - 12x + 2 - \frac{3}{2\sqrt{x}}$. **B.** $y' = 5x^4 - 12x + 2 - \frac{3}{2\sqrt{x}}$.

C. $y' = 5x^4 - 4x + 2 - \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$.

D. $y' = 5x^4 - 12x^2 + 2 - \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$.

Bài làm $y' = \left(x^5 - 4x^3 + 2x - 3\sqrt{x}\right)' \Leftrightarrow y' = \left(x^5\right)' - 4\left(x^3\right)' + 2.x' - 3\left(\sqrt{x}\right)' \Leftrightarrow y' = 5x^4 - 12x + 2 - \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$.

Bài 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau;

Câu a). $y = \left(x^2 + 3x\right)\left(2 - x\right)$.

A. $-3x^2 - x + 6$. **B.** $3x^2 - 2x + 6$. **C.** $-3x^2 - 2x$. **D.** $-3x^2 - 2x + 6$.

Bài làm $y' = \left[\left(x^2 + 3x\right)\left(2 - x\right)\right]' = \left(x^2 + 3x\right)'.\left(2 - x\right) + \left(x^2 + 3x\right).\left(2 - x\right)'$

$= \left(2x + 3\right)\left(2 - x\right) + \left(x^2 + 3x\right)\left(-1\right) = -3x^2 - 2x + 6$.

Câu b). $y = \left(2x - 3\right)\left(x^5 - 2x\right)$

A. $12x^5 - 15x^4 - 8x + 6$. **B.** $12x^5 - 5x^4 - 8x + 6$. **C.** $12x^5 - 15x^4 - x + 6$. **D.** $12x^5 - x^4 - x + 6$.

Bài làm $y' = \left[\left(2x - 3\right)\left(x^5 - 2x\right)\right]' = \left(2x - 3\right)'\left(x^5 - 2x\right) + \left(x^5 - 2x\right)'\left(2x - 3\right)$

$= 2\left(x^5 - 2x\right) + \left(5x^4 - 2\right)\left(2x - 3\right) = 12x^5 - 15x^4 - 8x + 6$.

Câu c). $y = \left(x^2 + 1\right)\left(5 - 3x^2\right)$

A. $-12x^3 + 4x$. **B.** $12x^3 + 4x$. **C.** $6x^3 + 4x$. **D.** $-12x^3 + x$.

Bài làm $y' = \left[\left(x^2 + 1\right)\left(5 - 3x^2\right)\right]' = \left(x^2 + 1\right)'\left(5 - 3x^2\right) + \left(5 - 3x^2\right)'\left(x^2 + 1\right)$

$= 2x\left(5 - 3x^2\right) - 6x\left(x^2 + 1\right) = 10x - 6x^3 - 6x^3 - 6x = -12x^3 + 4x$.

Câu d). $y = x\left(2x - 1\right)\left(3x + 2\right) = \left(2x^2 - x\right)\left(3x + 2\right)$

A. $18x^2 + 2x$ **B.** $18x^2 + x - 2$. **C.** $8x^2 + 2x - 2$. **D.** $18x^2 + 2x - 2$.

Bài làm $y' = \left[\left(2x^2 - x\right)\left(3x + 2\right)\right]' = \left(2x^2 - x\right)'\left(3x + 2\right) + \left(3x + 2\right)'.\left(2x^2 - x\right)$

$= \left(4x - 1\right)\left(3x + 2\right) + 3\left(2x^2 - x\right) = 18x^2 + 2x - 2$.

Câu e). $y = \left(x^2 - 2x + 3\right)\left(2x^2 + 3\right)$

A. $12x^3 - 4x^2 + 4x - 6$. **B.** $2x^3 - 4x^2 + 24x - 6$. **C.** $12x^3 - x^2 + 24x - 6$.
D. $12x^3 - 4x^2 + 24x - 6$.

✍**Bài làm** $y' = \left[\left(x^2-2x+3\right)\left(2x^2+3\right)\right]' = \left(x^2-2x+3\right)'\left(2x^2+3\right)+\left(2x^2+3\right)'\left(x^2-2x+3\right)$

$= (4x-2)\left(2x^2+3\right)+4x\left(x^2-2x+3\right) = 12x^3-4x^2+24x-6.$

Câu f) $y = x^2\sqrt{x}$

A. $\frac{x\sqrt{x}}{2}$. **B.** $\frac{5\sqrt{x}}{2}$. **C.** $\frac{5x\sqrt{x}}{3}$. **D.** $\frac{5x\sqrt{x}}{2}$.

✍**Bài làm** $y' = \left(x^2\sqrt{x}\right)' = \left(x^2\right)'.\sqrt{x}+\left(\sqrt{x}\right)'.x^2 = 2x.\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}.x^2 = 2x\sqrt{x}+\frac{1}{2}x\sqrt{x} = \frac{5x\sqrt{x}}{2}.$

Câu g) $y = \frac{2x-1}{4x-3}$

A. $\frac{2}{(4x-3)^2}$. **B.** $\frac{-2}{(x-3)^2}$. **C.** $\frac{2}{4x-3}$. **D.** $\frac{-2}{(4x-3)^2}$.

✍**Bài làm** $\Rightarrow y' = \left(\frac{2x-1}{4x-3}\right)' = \frac{(2x-1)'(4x-3)-(4x-3)'(2x-1)}{(4x-3)^2} = \frac{2(4x-3)-4(2x-1)}{(4x-3)^2} = \frac{-2}{(4x-3)^2}.$

Câu h) $y = \frac{2x+10}{4x-3}$

A. $\frac{46}{(4x-3)^2}$ **B.** $\frac{-4}{(4x-3)^2}$ **C.** $\frac{-46}{4x-3}$ **D.** $\frac{-46}{(4x-3)^2}$

✍**Bài làm** $\Rightarrow y' = \left(\frac{2x+10}{4x-3}\right)' = \frac{(2x+10)'.(4x-3)-(4x-3)'.(2x+10)}{(4x-3)^2} = \frac{2(4x-3)-4(2x+10)}{(4x-3)^2} = \frac{-46}{(4x-3)^2}$

Câu k). $y = \frac{3}{2x+1}$

A. $\frac{6}{(2x+1)^2}$. **B.** $\frac{-16}{(2x+1)^2}$. **C.** $\frac{-26}{(2x+1)^2}$. **D.** $\frac{-36}{(2x+1)^2}$.

✍**Bài làm** $\Rightarrow y' = 3.\left(\frac{1}{2x+1}\right)' = -3.\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2} = \frac{-6}{(2x+1)^2}.$

Câu l). $y = \frac{2x+1}{1-3x}$

A. $\frac{15}{(1-3x)^2}$. **B.** $\frac{5}{(1-3x)^2}$. **C.** $\frac{25}{(1-3x)^2}$. **D.** $\frac{-5}{(1-3x)^2}$.

✍**Bài làm** $\Rightarrow y' = \left(\frac{2x+1}{1-3x}\right)'$

$$y'=\frac{(2x+1)'(1-3x)-(1-3x)'(2x+1)}{(1-3x)^2}=\frac{2(1-3x)+3(2x+1)}{(1-3x)^2}=\frac{5}{(1-3x)^2}.$$

Câu m). $y=\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

A. $\frac{(1-2x)(1-x+x^2)-(-1+2x)(1+x-x^2)}{(1-x+x^2)^2}$ **B.** $\frac{(1-2x)(1-x+x^2)-(1+2x)(1+x-x^2)}{(1-x+x^2)^2}$

C. $\frac{(1-2x)(1-x+x^2)-2x(1+x-x^2)}{(1-x+x^2)^2}$ **D.** $\frac{(1-2x)(1-x+x^2)-(-1+2x)(1+x-x^2)}{(1-x+x^2)^2}$

Bài làm $\Rightarrow y'=\left(\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}\right)'=\frac{(1+x-x^2)'(1-x+x^2)-(1-x+x^2)'(1+x-x^2)}{(1-x+x^2)^2}$

$=\frac{(1-2x)(1-x+x^2)-(-1+2x)(1+x-x^2)}{(1-x+x^2)^2}$

Câu n). $y=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$

A. $\frac{x^2-x}{(x-1)^2}$. **B.** $\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$. **C.** $\frac{x^2-2}{(x-1)^2}$. **D.** $\frac{x^2+2x}{(x-1)^2}$.

Bài làm $\Rightarrow y'=\frac{(x^2-3x+3)'(x-1)-(x-1)'(x^2-3x+3)}{(x-1)^2}=\frac{(2x-3)(x-1)-(x^2+3x+3)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}.$

Câu o). $y=\frac{2x^2-4x+1}{x-3}$

A. $\frac{2x^2-2x+11}{(x-3)^2}$. **B.** $\frac{2x^2-x+11}{(x-3)^2}$. **C.** $\frac{x^2-12x+11}{(x-3)^2}$. **D.** $\frac{2x^2-12x+11}{(x-3)^2}$.

Bài làm $\Rightarrow y'=\frac{(2x^2-4x+1)'(x-3)-(x-3)'(2x^2-4x+1)}{(x-3)^2}=\frac{(4x-4)(x-3)-(2x^2-4x+1)}{(x-3)^2}=\frac{2x^2-12x+11}{(x-3)^2}.$

Bài 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

Câu a). $y=(x^7+x)^2$.

A. $(x^7+x)(7x^6+1)$ **B.** $2(7x^6+1)$ **C.** $2(x^7+x)(x^6+1)$ **D.** $2(x^7+x)(7x^6+1)$

Bài làm Sử dụng công thức $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$ (với $u = x^7 + x$)

$y' = 2\left(x^7 + x\right).\left(x^7 + x\right)' = 2\left(x^7 + x\right)\left(7x^6 + 1\right)$

Câu b). $y = \left(2x^3 - 3x^2 - 6x + 1\right)^2$.

A. $2\left(2x^3 - x^2 + 6x + 1\right)\left(6x^2 - 6x + 6\right)$. **B.** $2\left(2x^3 - 3x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - 6x + 6\right)$.

C. $2\left(2x^3 - 3x^2 + 6x + 1\right)\left(x^2 - 6x + 6\right)$. **D.** $2\left(2x^3 - 3x^2 + 6x + 1\right)\left(6x^2 - 6x + 6\right)$.

Bài làm Sử dụng công thức $\left(u^{\alpha}\right)'$ với $u = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 1$

$y' = 2\left(2x^3 - 3x^2 + 6x + 1\right)\left(2x^3 - 3x^2 + 6x + 1\right)' = 2\left(2x^3 - 3x^2 + 6x + 1\right)\left(6x^2 - 6x + 6\right)$.

Câu c). $y = \left(1 - 2x^2\right)^3$.

A. $12x\left(1 - 2x^2\right)^2$. **B.** $-12x\left(1 - 2x^2\right)^2$. **C.** $-24x\left(1 - 2x^2\right)^2$. **D.** $24x\left(1 - 2x^2\right)^2$.

Bài làm: Sử dụng công thức $\left(u^{\alpha}\right)'$ với $u = 1 - 2x^2$

$y' = 3\left(1 - 2x^2\right)^2\left(1 - 2x^2\right)' = 3\left(1 - 2x^2\right)^2\left(-4x\right) = -12x\left(1 - 2x^2\right)^2$.

Câu d). $y = \left(x - x^2\right)^{32}$.

A. $\left(x - x^2\right)^{31}.\left(1 - 2x\right)$ **B.** $32\left(x - x^2\right)^{31}$ **C.** $32\left(1 - x^2\right)^{31}$

D. $32\left(x - x^2\right)^{31}.\left(1 - 2x\right)$

Bài làm: Sử dụng công thức $\left(u^{\alpha}\right)'$ với $u = x - x^2$

$y' = 32\left(x - x^2\right)^{31}.\left(x - x^2\right)' = 32\left(x - x^2\right)^{31}.\left(1 - 2x\right)$

Câu e). $y = \left(x^2 + x + 1\right)^4$.

A. $4\left(x^2 + x + 1\right)^3$. **B.** $\left(x^2 + x + 1\right)^3.\left(2x + 1\right)$ **C.** $\left(x^2 + x + 1\right)^3$.

D. $4\left(x^2 + x + 1\right)^3.\left(2x + 1\right)$

Bài làm: Sử dụng công thức $\left(u^{\alpha}\right)'$ với $u = x^2 + x + 1$

$y' = 4\left(x^2 + x + 1\right)^3.\left(x^2 + x + 1\right)' = 4\left(x^2 + x + 1\right)^3.\left(2x + 1\right)$

Câu f). $y=\left(x^2-x+1\right)^3.\left(x^2+x+1\right)^2$

A. $y'=\left(x^2-x+1\right)^2\left[3\left(2x-1\right)\left(x^2+x+1\right)+2\left(2x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\right]$

B. $y'=\left(x^2-x+1\right)^2\left(x^2+x+1\right)\left[3\left(2x-1\right)\left(x^2+x+1\right)+\left(x^2-x+1\right)\right]$

C. $y'=\left(x^2-x+1\right)^2\left(x^2+x+1\right)\left[3\left(2x-1\right)\left(x^2+x+1\right)+2\left(2x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\right]$

D. $y'=\left(x^2-x+1\right)^2\left(x^2+x+1\right)\left[3\left(2x-1\right)\left(x^2+x+1\right)-2\left(2x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\right]$

✍***Bài làm:*** Đầu tiên sử dụng quy tắc nhân.

$y'=\left[\left(x^2-x+1\right)^3\right]'\left(x^2+x+1\right)^2+\left[\left(x^2+x+1\right)^2\right]'\left(x^2-x+1\right)^3.$

Sau đó sử dụng công thức $\left(u^\alpha\right)'$

$y'=3\left(x^2-x+1\right)^2\left(x^2-x+1\right)'\left(x^2+x+1\right)+2\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x+1\right)'\left(x^2-x+1\right)^3$

$y'=3\left(x^2-x+1\right)^2\left(2x-1\right)\left(x^2+x+1\right)^2+2\left(x^2+x+1\right)\left(2x+1\right)\left(x^2-x+1\right)^3$

$y'=\left(x^2-x+1\right)^2\left(x^2+x+1\right)\left[3\left(2x-1\right)\left(x^2+x+1\right)+2\left(2x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\right].$

Câu g) $y=\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^3$

A. $\dfrac{3\left(2x+1\right)^2}{\left(x-1\right)^4}.$ **B.** $-\dfrac{\left(2x+1\right)^2}{\left(x-1\right)^4}.$ **C.** $\dfrac{\left(2x+1\right)^2}{\left(x-1\right)^4}.$ **D.** $-\dfrac{3\left(2x+1\right)^2}{\left(x-1\right)^4}.$

✍***Bài làm:*** Bước đầu tiên sử dụng $\left(u^\alpha\right)'$, với $u=\dfrac{2x+1}{x-1}$

$y'=3.\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^2.\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)'=3.\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^2.\dfrac{-1}{\left(x-1\right)^2}=-\dfrac{3\left(2x+1\right)^2}{\left(x-1\right)^4}.$

Câu h). $y=\dfrac{1}{\left(x^2-x+1\right)^5}$

A. $-\dfrac{5\left(2x-1\right)}{\left(x^2-x+1\right)^6}$ **B.** $\dfrac{5\left(2x-1\right)}{\left(x^2-x+1\right)^6}$ **C.** $-\dfrac{2x-1}{\left(x^2-x+1\right)^6}$ **D.** $\dfrac{2x-1}{\left(x^2-x+1\right)^6}$

✍***Bài làm:*** Đầu tiên sử dụng công thức $\left(\dfrac{1}{u}\right)'$ với $u=\left(x^2-x+1\right)^5$

$$y' = -\frac{\left(x^2-x+1^{\ 5}\right)^{/}}{\left(x^2-x+1^{\ 5}\right)^{2}} = \frac{-5\ x^2-x+1^{\ 4}.\ x^2-x+1^{\ /}}{x^2-x+1^{\ 10}} = -\frac{5\ 2x-1}{x^2-x+1^{\ 6}}$$

Câu k). $y = \frac{2-x^2\quad 3-x^3}{1-x+x^2}$

A. $y' = \frac{5x^4-6x^2-x\quad 1-x+x^2\ -\ -1+2x\quad 2-x^2\quad 3-x^3}{1-x+x^2\ ^{2}}$

B. $y' = \frac{5x^4-6x^2-x\quad 1-x+x^2\ -\ 1+2x\quad 2-x^2\quad 3-x^3}{1-x+x^2\ ^{2}}$

C. $y' = \frac{5x^4-x^2-x\quad 1-x+x^2\ -\ 1+x\quad 2-x^2\quad 3-x^3}{1-x+x^2\ ^{2}}$

D. $y' = \frac{5x^4-6x^2-6x\quad 1-x+x^2\ -\ -1+2x\quad 2-x^2\quad 3-x^3}{1-x+x^2\ ^{2}}$

✍***Bài làm:*** Đầu tiên sử dụng $\left(\frac{u}{v}\right)^{/}$

$$y' = \frac{\left[\ 2-x^2\quad 3-x^3\ \right]^{/}.\ 1-x+x^2\ -\ 1-x+x^2\ ^{/}\ 2-x^2\quad 3-x^3}{1-x+x^2\ ^{2}}$$

Tính $\left[\ 2-x^2\quad 3-x^3\ \right]^{/} = \ 2-x^2\ ^{/}\ 3-x^3\ +\ 3-x^3\ ^{/}\ 2-x^2$

$= -2x\ 3-x^3\ -3x^2\ 2-x^2\ = 5x^4-6x^2-6x.$

Vậy $y' = \frac{5x^4-6x^2-6x\quad 1-x+x^2\ -\ -1+2x\quad 2-x^2\quad 3-x^3}{1-x+x^2\ ^{2}}$

Câu l). $y = \ 1+2x\quad 2+3x^2\quad 3-4x^3$

A. $y' = \ 2+3x^2\quad 3-4x^3\ +\ 1+2x\quad 6x\quad 3-4x^3\ +\ 1+2x\quad 2+3x^2\quad -12x^2$

B. $y' = 4\ 2+3x^2\quad 3-4x^3\ +\ 1+2x\quad 6x\quad 3-4x^3\ +\ 1+2x\quad 2+3x^2\quad -12x^2$

C. $y' = 2\ 2+3x^2\quad 3-4x^3\ +\ 1+2x\quad 6x\quad 3-4x^3\ +\ 1-2x\quad 2+3x^2\quad -12x^2$

D. $y' = 2\ 2+3x^2\quad 3-4x^3\ +\ 1+2x\quad 6x\quad 3-4x^3\ +\ 1+2x\quad 2+3x^2\quad -12x^2$

Bài làm:

$y' = (1+2x)'(2+3x^2)(3-4x^3) + (1+2x)(2+3x^2)'(3-4x^3) + (1+2x)(2+3x^2)(3-4x^3)'$

$y' = 2(2+3x^2)(3-4x^3) + (1+2x)6x(3-4x^3) + (1+2x)(2+3x^2)(-12x^2)$.

Bài 4. Tính đạo hàm các hàm số sau

Câu a). $y = x^2 + x\sqrt{x} + 1$

A. $x + \frac{3\sqrt{x}}{2}$. **B.** $2x + \frac{\sqrt{x}}{2}$. **C.** $x + \frac{\sqrt{x}}{2}$. **D.** $2x + \frac{3\sqrt{x}}{2}$.

Bài làm: $y' = (x^2)' + (x\sqrt{x})' + 1' = 2x + x'.\sqrt{x} + (\sqrt{x})'.x = 2x + \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.x = 2x + \frac{3\sqrt{x}}{2}$.

Câu b). $y = \sqrt{1+2x-x^2}$.

A. $\frac{-x}{\sqrt{1+2x-x^2}}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$ **C.** $\frac{1-x}{\sqrt{1+x-x^2}}$ **D.** $\frac{1-x}{\sqrt{1+2x-x^2}}$

Bài làm: Sử dụng công thức $(\sqrt{u})'$ với $u = 1+2x-x^2$

$y' = \frac{(1+2x-x^2)'}{\sqrt{1+2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{1+2x-x^2}}$.

Câu c). $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{1-x^2}$

A. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **B.** $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **D.** $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Bài làm: $y' = (\sqrt{x^2+1})' - (\sqrt{1-x^2})' = \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} - \frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Câu d). $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$.

A. $\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$ **B.** $\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}}$ **C.** $\frac{3}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$ **D.** $\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

Bài làm: Sử dụng công thức $(\sqrt{u})'$ với $u = \frac{x^2+1}{x}$

$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}}.\left(\frac{x^2+1}{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

Câu e). $y=\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$.

A. $y'=2\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).\frac{1}{(1+\sqrt{x})^2}$ **B.** $y'=2\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).\frac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

C. $y'=\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).\frac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ **D.** $y'=2\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

✍***Bài làm:*** Đầu tiên sử dụng công thức $(u^{\alpha})'$ với $u=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

$$y'=2\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)'$$

Tính $\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)'=\frac{(1-\sqrt{x})'(1+\sqrt{x})-(1+\sqrt{x})'(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^2}$

$$=\frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-x)}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$

Vậy $y'=2\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).\frac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$.

Câu f). $y=\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

A. $\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{-1}{2\sqrt{x-1}(x-1)}$. **B.** $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}+\frac{-1}{2\sqrt{x-1}}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{-1}{\sqrt{x-1}(x-1)}$. **D.** $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}+\frac{-1}{2\sqrt{x-1}(x-1)}$.

✍***Bài làm:*** $y'=(\sqrt{x-1})'+\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}+\frac{-(\sqrt{x-1})'}{(\sqrt{x-1})^2}=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}+\frac{-1}{2\sqrt{x-1}(x-1)}$.

Câu g). $y=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$.

A. $5\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}.x}\right)$ **B.** $5\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}.x}\right)$

C. $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}.x}\right)$ **D.** $5\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}.x}\right)$

Bài làm: Bước đầu tiên sử dụng $u^{\alpha}\ '$ với $u=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$y'=5\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4.\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=5\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4.\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}\ '}{\sqrt{x}\ ^2}\right)$$

$$=5\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}.x}\right)$$

Câu h). $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

A. $\frac{-x}{2\sqrt{1-x}\ 1-x}$. **B.** $\frac{3-x}{\sqrt{1-x}\ 1-x}$. **C.** $\frac{3}{2\sqrt{1-x}\ 1-x}$. **D.** $\frac{3-x}{2\sqrt{1-x}\ 1-x}$.

Bài làm: Sử dụng $\left(\frac{u}{v}\right)'$ được: $y'=\frac{1+x\ '\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x}\ '\ 1+x}{\sqrt{1-x}\ ^2}$

$$=\frac{\sqrt{1-x}-\frac{1-x\ '}{2\sqrt{1-x}}.\ 1+x}{1-x}=\frac{2\ 1-x\ +\ 1+x}{2\sqrt{1-x}.\ 1-x}=\frac{3-x}{2\sqrt{1-x}\ 1-x}.$$

Câu i) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

A. $\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}.\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}.\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}.\left[1+\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}.\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]$.

C. $\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}.\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}.\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$. **D.** $\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}.\left[1-\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}.\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$.

Bài làm: Đầu tiên áp dụng $\sqrt{u}$ với $u=x+\sqrt{x+\sqrt{x}}$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}.\ x+\sqrt{x}\ '\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}.\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}.\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right].$$

Câu k). $y=\frac{4x+1}{\sqrt{x^2+2}}$ (áp dụng u chia v đạo hàm)

A. $\frac{-x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$ **B.** $\frac{x+8}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$ **C.** $\frac{-x+8}{(x^2+3)\sqrt{x^2+2}}$ **D.** $\frac{-x+8}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$

✍*Bài làm:* $y'=\frac{(4x+1)'\sqrt{x^2+2}-\left(\sqrt{x^2+2}\right)'.(4x+1)}{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2}=\frac{4.\sqrt{x^2+2}-\frac{(x^2+2)'}{2\sqrt{x^2+2}}.(4x+1)}{x^2+2}$

$=\frac{4\sqrt{x^2+2}-\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}(4x+1)}{x^2+2}=\frac{4(x^2+2)-x(4x+1)}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}=\frac{-x+8}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$

Câu l). $y=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ (Áp dụng căn bặc hai của u đạo hàm).

A. $y'=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}}.\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^2}$.

B. $y'=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}}.\frac{2x^3-x^2}{(x-1)^2}$.

C. $y'=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}}.\frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}$. **D.** $y'=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}}.\frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}$.

✍*Bài làm:* $y'=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}}.\left(\frac{x^3}{x-1}\right)'$

Ta có: $\left(\frac{x^3}{x-1}\right)'=\frac{(x^3)'(x-1)-(x-1)'.x^3}{(x-1)^2}=\frac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}=\frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}$

Vậy $y'=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}}.\frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}$.

Câu m). $y=\sqrt{(x-2)^3}$.

A. $\frac{x-2}{2\sqrt{x-2}}$. **B.** $\frac{x-2}{\sqrt{x-2}}$. **C.** $\frac{3(x-2)}{\sqrt{x-2}}$. **D.** $\frac{3(x-2)}{2\sqrt{x-2}}$.

Bài làm: Đầu tiên áp dụng $\left(\sqrt{u}\right)^{/}$ với $u=(x-2)^3$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{(x-2)^3}}.\left((x-2)^3\right)^{/}=\frac{1}{2\sqrt{(x-2)^3}}.3.(x-2)^2=\frac{3(x-2)}{2\sqrt{x-2}}.$$

Câu n) $y=\left(1+\sqrt{1-2x}\right)^3$.

A. $\frac{-6\left(1+\sqrt{1-2x}\right)^2}{\sqrt{1-2x}}$. B. $\frac{-\left(1+\sqrt{1-2x}\right)^2}{2\sqrt{1-2x}}$. C. $\frac{-\left(1+\sqrt{1-2x}\right)^2}{\sqrt{1-2x}}$. D. $\frac{-6\left(1+\sqrt{1-2x}\right)^2}{2\sqrt{1-2x}}$.

Bài làm: Bước đầu tiên áp dụng $\left(u^{\alpha}\right)^{/}$ với $u=1+\sqrt{1-2x}$

$$y'=3\left(1+\sqrt{1-2x}\right)^2.\left(1+\sqrt{1-2x}\right)^{/}=3\left(1+\sqrt{1-2x}\right)^2.\frac{(1-2x)^{/}}{2\sqrt{1-2x}}=\frac{-6\left(1+\sqrt{1-2x}\right)^2}{2\sqrt{1-2x}}.$$

Bài 5. Tính đạo hàm các hàm số sau:

Câu a). $y=x\cos x$.

A. $\cos x-\sin x$. B. $-x\sin x$. C. $x\sin x$. D. $\cos x-x\sin x$.

Bài làm: Ta áp dụng đạo hàm tích.

$y'=x'\cos x+x.(\cos x)^{/}=\cos x-x\sin x.$

Câu b) $y=\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^3$.

A. $\frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^3}$ B. $\frac{3\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$ C. $\frac{2\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$ D. $\frac{3\sin^2 x}{(1+\cos x)^3}$

Bài làm: Bước đầu tiên ta áp dụng công thức $\left(u^{\alpha}\right)^{/}$ với $u=\frac{\sin x}{1+\cos x}$

$$y'=3\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2.\left(\frac{\sin}{1+\cos x}\right)^{/}$$

Tính : $\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^{/}=\frac{(\sin x)^{/}(1+\cos x)-(1+\cos x)^{/}.\sin x}{(1+\cos x)^2}=\frac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$

$$=\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}=\frac{1}{1+\cos x}.$$

Vậy $y'=3\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2.\frac{1}{1+\cos x}=\frac{3\sin^2 x}{(1+\cos x)^3}$.

Câu c). $y=\sin^3(2x+1)$.

A. $\sin^2(2x+1)\cos(2x+1)$.
B. $12\sin^2(2x+1)\cos(2x+1)$.
C. $3\sin^2(2x+1)\cos(2x+1)$.
D. $6\sin^2(2x+1)\cos(2x+1)$.

Bài làm: Bước đầu tiên áp dụng công thức $(u^\alpha)'$ với $u=\sin(2x+1)$

Vậy $y'=\left(\sin^3(2x+1)\right)'=3\sin^2(2x+1).\left(\sin(2x+1)\right)'$.

Tính $\left(\sin(2x+1)\right)'$: Áp dụng $(\sin u)'$, với $u=(2x+1)$

Ta được: $\left(\sin(2x+1)\right)'=\cos(2x+1).(2x+1)'=2\cos(2x+1)$.

$\Rightarrow y'=3.\sin^2(2x+1).2\cos(2x+1)=6\sin^2(2x+1)\cos(2x+1)$.

Câu d). $y=\sin\sqrt{2+x^2}$.

A. $\cos\sqrt{2+x^2}$.
B. $\dfrac{1}{\sqrt{2+x^2}}.\cos\sqrt{2+x^2}$.
C. $\dfrac{1}{2}.\cos\sqrt{2+x^2}$.
D. $\dfrac{x}{\sqrt{2+x^2}}.\cos\sqrt{2+x^2}$.

Bài làm: Áp dụng công thức $(\sin u)'$ với $u=\sqrt{2+x^2}$

$$y'=\cos\sqrt{2+x^2}.\left(\sqrt{2+x^2}\right)'=\cos\sqrt{2+x^2}.\frac{(2+x^2)'}{2\sqrt{2+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}.\cos\sqrt{2+x^2}.$$

Câu e). $y=\sqrt{\sin x+2x}$.

A. $\dfrac{\cos x+2}{2\sqrt{\sin x+2x}}$.
B. $\dfrac{\cos x+2}{\sqrt{\sin x+2x}}$.
C. $\dfrac{2}{2\sqrt{\sin x+2x}}$.
D. $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x+2x}}$.

Bài làm: Áp dụng $\left(\sqrt{u}\right)'$, với $u=\sin x+2x$

$$y'=\frac{(\sin x+2x)'}{2\sqrt{\sin x+2x}}=\frac{\cos x+2}{2\sqrt{\sin x+2x}}.$$

Câu f). $y=2\sin^2 4x-3\cos^3 5x$.

A. $y'=\sin 8x+\dfrac{45}{2}\cos 5x.\sin 10x$
B. $y'=8\sin 8x+\dfrac{5}{2}\cos 5x.\sin 10x$
C. $y'=8\sin x+\dfrac{45}{2}\cos 5x.\sin 10x$
D. $y'=8\sin 8x+\dfrac{45}{2}\cos 5x.\sin 10x$

Bài làm: Bước đầu tiên áp dụng $(u+v)'$

$y' = (2\sin^2 4x)' - 3(\cos^3 5x)'$

Tính $(\sin^2 4x)'$: Áp dụng $(u^\alpha)'$, với $u=\sin 4x$, ta được:

$(\sin^2 4x)' = 2\sin 4x.(\sin 4x)' = 2\sin 4x.\cos 4x(4x)' = 4\sin 8x.$

Tương tự: $(\cos^3 5x)' = 3\cos^2 5x.(\cos 5x)' = 3\cos^2 5x.(-\sin 5x).(5x)'$

$$= -15\cos^2 5x.\sin 5x = \frac{-15}{2}\cos 5x.\sin 10x.$$

Kết luận: $y' = 8\sin 8x + \frac{45}{2}\cos 5x.\sin 10x$

Câu h). $y = (2+\sin^2 2x)^3$.

A. $y' = 6\sin 4x(2+\sin^2 2x)^3$.

B. $y' = 3\sin 4x(2+\sin^2 2x)^2$.

C. $y' = \sin 4x(2+\sin^2 2x)^2$.

D. $y' = 6\sin 4x(2+\sin^2 2x)^2$.

Bài làm: Áp dụng $(u^\alpha)'$, với $u = 2+\sin^2 2x$.

$y' = 3(2+\sin^2 2x)^2(2+\sin^2 2x)' = 3(2+\sin^2 2x)^2(\sin^2 2x)'$.

Tính $(\sin^2 2x)'$, áp dụng $(u^\alpha)'$, với $u=\sin 2x$.

$(\sin^2 2x)' = 2.\sin 2x(\sin 2x)' = 2.\sin 2x.\cos 2x(2x)' = 2\sin 4x.$

$\Rightarrow y' = 6\sin 4x(2+\sin^2 2x)^2$.

Câu i). $y = \sin(\cos^2 x.\tan^2 x)$.

A. $y' = \cos(\cos^2 x.\tan^2 x)(\sin 2x\tan^2 x + 2\tan x)$

B. $y' = \cos(\cos^2 x.\tan^2 x)(\sin 2x\tan^2 x + \tan x)$

C. $y' = \cos(\cos^2 x.\tan^2 x)(-\sin 2x\tan^2 x + \tan x)$

D. $y' = \cos(\cos^2 x.\tan^2 x)(-\sin 2x\tan^2 x + 2\tan x)$

Bài làm: Áp dụng $(\sin u)'$, với $u = \cos^2 x\tan^2 x$

$y'=\cos\left(\cos^2 x.\tan^2 x\right).\left(\cos^2 x.\tan^2 x\right)'$.

Tính $\left(\cos^2 x.\tan^2 x\right)'$, bước đầu sử dụng $\left(u.v\right)'$, sau đó sử dụng $\left(u^{\alpha}\right)'$.

$\left(\cos^2 x.\tan^2 x\right)'=\left(\cos^2 x\right)'.\tan^2 x+\left(\tan^2 x\right)'.\cos^2 x$

$=2\cos x\left(\cos x\right)'\tan^2 x+2\tan x\left(\tan x\right)'\cos^2 x$

$=-2\sin x\cos x\tan^2 x+2\tan x\dfrac{1}{\cos^2 x}\cos^2 x=-\sin 2x\tan^2 x+2\tan x.$

Vậy $y'=\cos\left(\cos^2 x.\tan^2 x\right)\left(-\sin 2x\tan^2 x+2\tan x\right)$

Câu j). $y=\cos^2\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$.

A. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}.\sin\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$.

B. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}.\cos\left(2.\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$.

C. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}.\sin\left(2.\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$.

D. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}.\sin\left(2.\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$.

✍***Bài làm:*** Áp dụng $\left(u^{\alpha}\right)'$, với $u=\cos\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$

$y'=2.\cos\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right).\left[\cos\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\right]'=-2.\cos\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right).\sin\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right).\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)'$

$y'=-\sin\left(2\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right).\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)'$.

Tính $\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)'=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)'.\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(\sqrt{x}-1\right)'.\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}=\dfrac{-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$.

Vậy $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}.\sin\left(2.\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$.

Câu k). $y=\dfrac{\sin 2x+\cos 2x}{2\sin 2x-\cos 2x}$.

A. $\dfrac{6}{\left(2\sin 2x-\cos 2x\right)^2}$ **B.** $\dfrac{-6}{\left(\sin 2x-\cos 2x\right)^2}$ **C.** $\dfrac{6}{\left(2\sin 2x-\cos x\right)^2}$ **D.** $\dfrac{-6}{\left(2\sin 2x-\cos 2x\right)^2}$

Bài làm: $y' = \dfrac{\sin 2x + \cos 2x^{\ /}.\ 2\sin 2x - \cos 2x\ -\ 2\sin 2x - \cos 2x^{\ /}.\ \sin 2x + \cos 2x}{2\sin 2x - \cos 2x^{\ 2}}$

$y' = \dfrac{2\cos 2x - 2\sin 2x\quad 2\sin 2x - \cos 2x\ -\ 4\cos 2x + 2\sin 2x\quad \sin 2x + \cos 2x}{2\sin 2x - \cos 2x^{\ 2}}$

$y' = \dfrac{-6\cos^2 2x - 6\sin^2 2x}{2\sin 2x - \cos 2x^{\ 2}} = \dfrac{-6}{2\sin 2x - \cos 2x^{\ 2}}$.

Câu l). $y = \dfrac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

A. $\dfrac{\sin 2x}{\cos^2 2x}$. **B.** $\dfrac{\sin x}{\cos^2 2x}$. **C.** $\dfrac{2\cos 2x}{\sin^2 2x}$. **D.** $\dfrac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}$.

Bài làm: Áp dụng $\left(\dfrac{1}{u}\right)^{/}$.

$y' = \dfrac{-\ \cos 2x^{\ /}}{\cos 2x^{\ 2}} = \dfrac{\sin 2x.\ 2x^{\ /}}{\cos^2 2x} = \dfrac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}$.

Câu m). $y = \sin x.\cos 2x$.

A. $\cos 2x^{\ 5}$. **B.** $\cos 2x^{\ 4}$. **C.** $4\ \cos 2x^{\ 5}$. **D.** $2\ \cos 2x^{\ 5}$.

Bài làm: Áp dụng $u.v^{\ /}$

$y' = \sin x^{\ /}.\cos 2x + \cos 2x^{\ /}.\sin x = \cos x.\cos 2x - \sin 2x.\ 2x^{\ /}.\sin x$

$y' = \cos x.\cos 2x - 2\sin 2x.\sin x$.

Câu n). $y = \cos^4 x - \sin^4 x^{\ 5}$

A. $-10\cos^4 2x$. **B.** $-\cos^4 2x.\sin 2x$. **C.** $-10\cos^4 2x.\sin x$. **D.** $-10\cos^4 2x.\sin 2x$.

Bài làm: $= \left[\ \cos^2 x - \sin^2 x\quad \cos^2 x + \sin^2 x\ \right]^5 = \cos 2x^{\ 5}$. Áp dụng $u^{\alpha\ /}$, với $u = \cos 2x$

$y' = 5.\cos^4 2x.\ \cos 2x^{\ /} = 5.\cos^4 2x.\ -\sin 2x\ .\ 2x^{\ /} = -10\cos^4 2x.\sin 2x$.

Câu o). $y = \sin^2\ \cos\ \tan^4 3x$

A. $y' = \sin\ 2\cos\ \tan^4 3x\ .\ \sin\ \tan^4 3x\ .4\tan^3 3x.\ 1 + \tan^3 3x\ .3$

B. $y' = \sin\ 2\cos\ \tan^4 3x\ .\ \sin\ \tan^4 3x\ .\tan^3 3x.\ 1 + \tan^3 3x$.

C. $y' = \sin\ 2\cos\ \tan^4 3x\ .\ \sin\ \tan^4 3x\ .4\tan^3 3x.\ 1 + \tan^3 3x$

D. $y' = -\sin\ 2\cos\ \tan^4 3x\ .\ \sin\ \tan^4 3x\ .4\tan^3 3x.\ 1 + \tan^3 3x\ .3$

✍***Bài làm:*** Đầu tiên áp dụng $(u^{\alpha})^{/}$, với $u=\sin(\cos(\tan^4 3x))$

$y'=2\sin(\cos(\tan^4 3x)).\left[\sin(\cos(\tan^4 3x))\right]^{/}$

Sau đó áp dụng $(\sin u)^{/}$, với $u=\cos(\tan^4 3x)$

$y'=2\sin(\cos(\tan^4 3x)).\cos(\cos(\tan^4 3x)).(\cos(\tan^4 3x))^{/}$

Áp dụng $(\cos u)^{/}$, với $u=\tan^4 3x$.

$y'=-\sin(2\cos(\tan^4 3x)).\sin(\tan^4 3x).(\tan^4 3x)^{/}$.

Áp dụng $(u^{\alpha})^{/}$, với $u=\tan 3x$

$y'=-\sin(2\cos(\tan^4 3x)).\sin(\tan^4 3x).4\tan^3 3x.(\tan 3x)^{/}$.

$y'=-\sin(2\cos(\tan^4 3x)).\sin(\tan^4 3x).4\tan^3 3x.(1+\tan^2 3x).(3x)^{/}$.

$y'=-\sin(2\cos(\tan^4 3x)).\sin(\tan^4 3x).4\tan^3 3x.(1+\tan^3 3x).3$.

Câu p) $y=\sin^3 2x.\cos^3 2x$

A. $\sin^2 4x.\cos 4x.$ **B.** $\frac{3}{2}\sin^2 x.\cos x.$ **C.** $\sin^2 x.\cos 4x.$ **D.** $\frac{3}{2}\sin^2 4x.\cos 4x.$

✍***Bài làm:*** $y=\sin^3 2x.\cos^3 2x=(\sin 2x.\cos 2x)^3=\left(\frac{1}{2}\sin 4x\right)^3=\frac{1}{8}.\sin^3 4x$. Áp dụng $(u^{\alpha})^{/}, u=\sin 4x$.

$y'=\frac{1}{8}.3\sin^2 4x(\sin 4x)^{/}=\frac{1}{8}.3\sin^2 4x.\cos 4x.(4x)^{/}=\frac{3}{2}\sin^2 4x.\cos 4x.$

Câu q) $y=(\sin x+\cos x)^3$.

A. $3(\sin x+\cos x)^2(\cos x+\sin x)$. **B.** $3(\sin x-\cos x)^2(\cos x-\sin x)$.

C. $(\sin x+\cos x)^2(\cos x-\sin x)$. **D.** $3(\sin x+\cos x)^2(\cos x-\sin x)$.

✍***Bài làm:*** Áp dụng $(u^{\alpha})^{/}$, với $u=\sin x+\cos x$

$y'=3(\sin x+\cos x)^2.(\sin x+\cos x)^{/}=3(\sin x+\cos x)^2(\cos x-\sin x)$.

Câu r). $y=5\sin x-3\cos x$

A. $5\cos x+3\sin x.$ **B.** $\cos x+3\sin x.$ **C.** $\cos x+\sin x.$ **D.** $5\cos x-3\sin x.$

✍***Bài làm:*** $y'=(5\sin x)^{/}-(3\cos x)^{/}=5\cos x+3\sin x.$

Câu s). $y=\sin(x^2-3x+2)$

A. $\cos\ x^2-3x+2$ **B.** $2x-3\ .\sin\ x^2-3x+2$

C. $x-3\ .\cos\ x^2-3x+2$ **D.** $2x-3\ .\cos\ x^2-3x+2$

Bài làm: Áp dụng $\sin u\ ^{/}$, với $u=\ x^2-3x+2$

$y'=\cos\ x^2-3x+2\ .\ x^2-3x+2\ ^{/}\ =\ 2x-3\ .\cos\ x^2-3x+2$

Bài 6. Tính đạo hàm các hàm số sau:

Câu a). $y=\sin\sqrt{x}$ **.**

A. $\frac{1}{\sqrt{x}}.\cos\sqrt{x}.$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{x}}.\cos\sqrt{x}.$ **C.** $\frac{1}{\sqrt{x}}.\sin\sqrt{x}.$ **D.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}.\cos\sqrt{x}.$

Bài làm: Áp dụng $\sin u\ ^{/}$, với $u=\sqrt{x}$

$y'=\ \sin\sqrt{x}\ ^{/}\ =\cos\sqrt{x}.\ \sqrt{x}\ ^{/}\ =\frac{1}{2\sqrt{x}}.\cos\sqrt{x}.$

Câu b). $y=\cos^2 x$ **.**

A. $-\sin 2x.$ **B.** $\sin 2x.$ **C.** $\cos 2x.$ **D.** $2\sin 2x.$

Bài làm: Áp dụng công thức $u^{\alpha}\ ^{/}$, với $u=\cos x$

$y'=\ \cos^2 x\ ^{/}\ =2.\cos\ \cos x\ ^{/}\ =2\cos x.\ -\sin x\ \ =-\sin 2x.$

Câu c). $y=\cos\sqrt{2x+1}$ **.**

A. $-\frac{1}{\sqrt{2x+1}}.\sin\sqrt{2x+1}.$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}.\sin\sqrt{2x+1}.$ **C.** $\sin\sqrt{2x+1}.$

D. $-\frac{1}{\sqrt{2x+1}}.\cos\sqrt{2x+1}.$

Bài làm: Áp dụng $\cos u\ ^{/}$, với $u=\sqrt{2x+1}$

Câu $y'=\ \cos\sqrt{2x+1}\ ^{/}\ =-\sin\sqrt{2x+1}\ \ \sqrt{2x+1}\ ^{/}\ =-\sin\sqrt{2x+1}.\frac{2x+1\ ^{/}}{2\sqrt{2x+1}}$

$=-\sin\sqrt{2x+1}.\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}=-\frac{1}{\sqrt{2x+1}}.\sin\sqrt{2x+1}.$

Câu d). $y=\sin 3x.\cos 5x\ \ =\frac{1}{2}\ \sin\ -2x\ \ +\sin 8x\ \ =\frac{1}{2}\ \ -\sin 2x+\sin 8x$

A. $4\cos 8x-\cos 2x$ **B.** $\cos 8x-\cos 2x$ **C.** $4\cos 8x+\cos 2x$ **D.** $4\cos 8x-\cos 2x$

Bài làm: $y'=\frac{1}{2}\ \sin 8x-\sin 2x\ ^{/}\ =\frac{1}{2}\ \sin 8x\ ^{/}\ -\frac{1}{2}\ \sin 2x\ ^{/}\ =\frac{1}{2}\cos 8x\ \ 8x\ ^{/}\ -\frac{1}{2}\cos 2x.\ \ 2x\ ^{/}$

$=4\cos 8x-\cos 2x$

Câu e). $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$.

A. $\dfrac{\sin 2x}{\left(\sin x-\cos x\right)^2}$. **B.** $\dfrac{3\sin 2x}{\left(\sin x+\cos x\right)^2}$. **C.** $\dfrac{\sin 2x}{\left(\sin x+\cos x\right)^2}$. **D.** $\dfrac{2\sin 2x}{\left(\sin x-\cos x\right)^2}$.

Bài làm: Áp dụng $\left(\dfrac{u}{v}\right)^{/}$

$$y'=\frac{\left(\sin x+\cos x\right)^{/}\left(\sin x-\cos x\right)-\left(\sin x-\cos x\right)^{/}.\left(\sin x+\cos x\right)}{\left(\sin x-\cos x\right)^2}$$

$$y'=\frac{\left(\cos x-\sin x\right)\left(\sin x-\cos x\right)-\left(\cos x+\sin x\right)\left(\sin x+\cos x\right)}{\left(\sin x-\cos x\right)^2}$$

$$y'=\frac{-\left(\sin x-\cos x\right)^2-\left(\sin x+\cos x\right)^2}{\left(\sin x-\cos x\right)^2}=\frac{2\sin 2x}{\left(\sin x-\cos x\right)^2}.$$

Câu f). $y=\sqrt{\cos 2x}$.

A. $\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$. **B.** $\dfrac{-\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}$. **C.** $\dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}$. **D.** $\dfrac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

Bài làm: Áp dụng $\left(\sqrt{u}\right)^{/}$, với $u=\cos 2x$

$$y'=\frac{\left(\cos 2x\right)^{/}}{2\sqrt{\cos 2x}}=\frac{-\sin 2x.\left(2x\right)^{/}}{2\sqrt{\cos 2x}}=\frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

Câu g) $y=\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{x}{\sin x}$

A. $\dfrac{\cos x-\sin x}{x^2}+\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}$. **B.** $\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}-\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}$.

C. $\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}+\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin^2 x}$. **D.** $\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}+\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}$.

Bài làm:

$$\Rightarrow y'=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{/}+\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{/}=\frac{\left(\sin x\right)^{/}.x-x^{/}.\sin x}{x^2}+\frac{x^{/}.\sin x-\left(\sin x\right)^{/}.x}{\sin^2 x}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}+\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}.\text{h)}$$

Câu **Câu h).** $y=\sin\left(\cos x\right)+\cos\left(\sin x\right)$

A. $\sin\left(x+\cos x\right)$ **B.** $-\sin\left(x+\cos x\right)$ **C.** $-\sin\left(\cos x\right)$ **D.** $-\sin\left(x\right)$

Bài làm: Bước đầu tiên sử dụng đạo hàm tổng, sau đó sử dụng $\left(\sin u\right)^{/}$, $\left(\cos u\right)^{/}$.

$y' = \sin \cos x^{/} + \cos \sin x^{/} = \cos \cos x \,.\, \cos x^{/} - \sin \sin x \,.\, \sin x^{/}$

$= -\sin x.\cos \cos x - \cos x.\sin \sin x = -\sin x.\cos \cos x + \cos x.\sin \sin x$

$= -\sin x + \cos x$

Câu i). $y = \dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$.

A. $\dfrac{-2\sin x + 2x\cos x}{x-\sin x^{2}}$. **B.** $\dfrac{-2\sin x + x\cos x}{x-\sin x^{2}}$. **C.** $\dfrac{-\sin x + x\cos x}{x-\sin x^{2}}$. **D.** $\dfrac{2\sin x + 2x\cos x}{x-\sin x^{2}}$.

✍***Bài làm:*** Sử dụng $\left(\dfrac{u}{v}\right)^{/}$

$y' = \dfrac{x+\sin x^{/} \,.\, x-\sin x - x-\sin x^{/} \,.\, x+\sin x}{x-\sin x^{2}}$

$= \dfrac{1+\cos x \;\; x-\sin x - 1-\cos x \;\; x+\sin x}{x-\sin x^{2}} = \dfrac{-2\sin x + 2x\cos x}{x-\sin x^{2}}$.

Câu k). $y = \left(\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}\right)^{2}$.

A. $2\left(\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}\right).\left(\dfrac{-4\sin 2x}{1-\cos 2x^{2}}\right)$

B. $\left(\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}\right).\left(\dfrac{-4\sin 2x}{1-\cos 2x^{2}}\right)$

C. $2\left(\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}\right).\left(\dfrac{-\sin 2x}{1-\cos 2x^{2}}\right)$

D. $2\left(\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}\right).\left(\dfrac{-4\sin 2x}{1-\cos 2x^{2}}\right)$

✍***Bài làm:*** Sử dụng $u^{\alpha \, /}$ với $u = \dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$

$y' = 2\left(\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}\right).\left(\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}\right)^{/}$

$= 2\left(\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}\right).\left(\dfrac{1+\cos 2x^{/} \;\; 1-\cos 2x - 1-\cos 2x^{/} \;\; 1+\cos 2x}{1-\cos 2x^{2}}\right)$

$= 2\left(\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}\right).\left(\dfrac{-2\sin 2x \;\; 1-\cos 2x - 2\sin 2x \;\; 1+\cos 2x}{1-\cos 2x^{2}}\right)$

$= 2\left(\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}\right).\left(\dfrac{-4\sin 2x}{1-\cos 2x^{2}}\right)$.

Câu l). $y = \sin^{4} x + \cos^{4} x$

A. $\sin 4x.$ **B.** $2-\sin 4x.$ **C.** $\cos 4x-\sin 4x.$ **D.** $-\sin 4x.$

✍***Bài làm:*** $=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x.$

$y'=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x\right)^{/}=\frac{1}{4}\left(\cos 4x\right)^{/}=\frac{1}{4}\left(-\sin 4x\right).\left(4x\right)^{/}=-\sin 4x.$

Câu m). $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)^2$ **.**

A. $-4\left(x-\frac{\pi}{4}\right).\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)^2.$ **B.** $-\left(2x-\frac{\pi}{4}\right).\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)^2.$

C. $-4\left(2x-\frac{\pi}{4}\right).\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2.$ **D.** $-4\left(2x-\frac{\pi}{4}\right).\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)^2.$

✍***Bài làm:*** Áp dụng $\left(\cos u\right)^{/}$ với $u=\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)^2$

$y'=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)^2.\left[\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)^2\right]^{/}=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)^2.2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right).\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)^{/}$

$=-4\left(2x-\frac{\pi}{4}\right).\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)^2.$

Câu n). $y=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$

A. $\frac{x^2}{\left(\cos x+\sin x\right)^2}.$ **B.** $\frac{x^2}{\left(\cos x-\sin x\right)^2}.$ **C.** $\frac{2x^2}{\left(\cos x+x\sin x\right)^2}.$ **D.** $\frac{x^2}{\left(\cos x+x\sin x\right)^2}.$

✍***Bài làm:*** $y'=\frac{\left(\sin x-x\cos x\right)^{/}\left(\cos x+x\sin x\right)-\left(\cos x-x\sin x\right)^{/}\left(\sin x-x\cos x\right)}{\left(\cos x+x\sin x\right)^2}$

Tính $\left(\sin x-x\cos x\right)^{/}=\cos x-\left(x\cos x\right)^{/}=\cos x-\left(x'.\cos x+x.\left(\cos x\right)^{/}\right)$

$=\cos x-\left(\cos x-x\sin x\right)=x\sin x$

Tính $\left(\cos x+x\sin x\right)^{/}=-\sin x+\left(x'.\sin x+x.\left(\sin x\right)^{/}\right)$

$=-\sin x+\left(\sin x+x\cos x\right)=x\cos x$

$\Rightarrow y'=\frac{x\sin x\left(\cos x+x\sin x\right)-x\cos x\left(\sin x-x\cos x\right)}{\left(\cos x+x\sin x\right)^2}=\frac{x^2}{\left(\cos x+x\sin x\right)^2}.$

Bài 7. Cho $f\left(x\right)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}$. Tính $f'\left(-1\right)$.

A.-14 **B.12** **C.13** **D.10**

✍***Bài làm:*** Bước đầu tiên tính đạo hàm sử dụng công thức $\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)^/ = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$

$$f'\ x = \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)^/ = -\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}-\frac{9}{x^4} \Rightarrow f'\ 1 = -1-4-9=-14$$

Bài 8. Cho $f\ x = \frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+x^2$. Tính $f'\ 1$

A. $\frac{1}{2}$ **B.1** **C.2** **D.3**

✍***Bài làm:*** Ta có $f'\ x = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+x^2\right)^/ = -\frac{1}{x^2}-\frac{\sqrt{x}^{\ /}}{x}+2x = -\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}+2x$

Vậy $f'\ 1 = -1-\frac{1}{2}+2=\frac{1}{2}$

Bài 9. Cho $f\ x = x^5+x^3-2x-3$. Tính $f'\ 1 + f'\ -1 + 4f\ 0$

A.4 **B.5** **C.6** **D.7**

✍***Bài làm:*** Ta có $f'\ x = \ x^5+x^3-2x-3\ ^/ = 5x^4+3x^2-2$

$$f'\ 1 + f'\ -1 + 4f\ 0 = (5+3-2)+(5+3-2)+4.(-2)=4$$

Bài 10. Cho $f\ x = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. Tính $f'\ 0$

A. $\frac{1}{4}$ **B.1** **C.2** **D.3**

✍***Bài làm:*** $f'\ x = \left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^/ = \frac{x'\sqrt{4-x^2}-x\ \sqrt{4-x^2}\ ^/}{\sqrt{4-x^2}\ ^2} = \frac{\sqrt{4-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2} = \frac{4}{4-x^2\ \sqrt{4-x^2}}$

Vậy $f'\ 0 = \frac{1}{4}$.

NGUYỄN BẢO VƯƠNG

CHƯƠNG V. ĐẠO HÀM

TẬP 2A. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ KHI BIẾT TIẾP ĐIỂM.

MỤC LỤC

LỜI TÂM SỰ

Ở tài liệu tiếp tuyến này, tôi chia thành 3 tập nhỏ, vì đảm bảo chất lượng bố cục, và công tác trình bày, vì vậy mong quý vị bạn đọc theo dõi một cách thường xuyên để luôn được cập nhật tài liệu hay và chất lượng của chúng tôi. Thân ái.

PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

• *Ý nghĩa hình học của đạo hàm*: Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số tại điểm $M_0\left(x_0; f(x_0)\right)$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M_0\left(x_0; f(x_0)\right)$ là:

$$y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$$

$$\left(y_0 = f(x_0)\right)$$

• Điều kiện cần và đủ để hai đường $\left(C_1\right): y = f(x)$ và $\left(C_2\right): y = g(x)$ tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ x_0 là hệ phương trình $\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$ có nghiệm x_0

Nghiệm của hệ là hoành độ của tiếp điểm của hai đường đó.

• Nếu $(C_1): y = px + q$ và $\left(C_2\right): y = ax^2 + bx + c$ thì

(C_1) và $\left(C_2\right)$ iếp xúc nhau ⇔ phương trình $ax^2 + bx + c = px + q$ có nghiệm kép.

Các dạng tiếp tuyến của đồ thị hàm số thường gặp

- Viết phương trình tiếp tuyến khi biết tọa độ tiếp điểm $M\left(x_0; y_0\right)$, hoặc hoành độ x_0, hoặc tung độ y_0.
- Viết phương trình tiếp tuyến khi biết tiếp tuyến đi qua điểm $A\left(x_A; y_A\right)$ cho trước.
- Viết phương trình tiếp tuyến khi biết hệ số góc của nó.

  Phương pháp:

  Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$ và $M\left(x_0; y_0\right)$ là điểm trên $\left(C\right)$. Tiếp tuyến với đồ thị $\left(C\right)$ tại $M\left(x_0; y_0\right)$ có:

- Hệ số góc: $k = f'\left(x_0\right)$
- Phương trình: $y - y_0 = k\left(x - x_0\right)$, hay $y - y_0 = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$

  Vậy, để viết được phương trình tiếp tuyến tại $M\left(x_0; y_0\right)$ chúng ta cần đủ ba yếu tố sau:

- Hoành độ tiếp điểm: x_0
- Tung độ tiếp điểm: y_0 (Nếu đề chưa cho, ta phải tính bằng cách thay x_0 vào hàm số $y_0 = f\left(x_0\right)$)
- Hệ số góc $k = f'\left(x_0\right)$

Vấn đề 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số khi biết tiếp điểm.

Phương pháp:

Bài toán 1 :

Hai đường cong $\left(C\right): y = f\left(x\right)$ và $\left(C'\right): y = g\left(x\right)$ tiếp xúc nhau tại $M\left(x_0; y_0\right)$.Khi điểm $M \in \left(C\right) \cap \left(C'\right)$ và tiếp tuyến tại M của $\left(C\right)$ trùng với tiếp tuyến tại M của $\left(C'\right)$ chỉ khi hệ phương trình sau:

$\begin{cases} f\left(x_0\right) = g\left(x_0\right) \\ f'\left(x_0\right) = g'\left(x_0\right) \end{cases}$ có nghiệm x_0.

Lưu ý : Mệnh đề sau đây không đúng cho mọi trường hợp:

$\begin{cases}(C): y = f(x) \\ (d): y = ax + b\end{cases}$ tiếp xúc nhau $\Rightarrow f(x) - ax - b = 0$ có nghiệm kép .

Hàm $f(x)$ nhận x_0 làm nghiệm bội k nếu $f(x_0) = f'(x_0) = ... = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ và $f^k(x_0) \neq 0$. Nghiệm bội lớn hơn hoặc bằng 2 chứ **không phải nghiệm kép**.

Phép biến đổi tương đương của phương trình nói chung không bảo toàn số bội của nghiệm.

Ví dụ 1. Đường cong $y = \sqrt{x}$ không tiếp xúc với trục hoành tại 0, tức là phương trình $\sqrt{x} = 0$ không nhận 0 làm nghiệm bội lớn hơn hoặc bằng 2. Khi đó đồ thị $(C): y = x^3$ của hàm số tiếp xúc với trục hoành tại $x = 0$ nhưng phương trình $x^3 = 0$ nhận 0 làm nghiệm bội 3 .

Ví dụ 2. Đồ thị $(C): y = \sin x$ của hàm số tiếp xúc với đường thẳng $(d): y = x$ tại $x = 0$ nhưng phương trình $\sin x - x = 0$ thì không thể có nghiệm kép.

Như vậy, biến đổi tương đương của phương trình chỉ bảo toàn tập nghiệm, chứ không chắc bảo toàn số bội các nghiệm. Đây cũng là sai lầm dễ mắc phải khi giải quyết bài toán tiếp tuyến.

Bài toán 2 :

* Đường cong $(C): y = f(x)$ có tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 khi và chỉ khi hàm số $y = f(x)$ khả vi tại x_0. Trong trường hợp (C) có tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 thì tiếp tuyến đó có hệ số góc $f'(x_0)$.
* Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ có dạng :
  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Bài toán 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; f(x_0))$.

Giải. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $M(x_0; y_0)$ là:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

Bài toán 4. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ biết hoành độ tiếp điểm $x = x_0$.

Giải:

Tính $y_0 = f(x_0), y'(x_0) \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Bài toán 5. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ biết tung độ tiếp điểm bằng y_0.

Giải. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Giải phương trình $f(x) = y_0$ ta tìm được các nghiệm x_0.

Tính $y'(x_0)$ và thay vào phương trình (1).

Các ví dụ

Ví dụ 1 : Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) :

1. Tại điểm $M(-1; 3)$; **2.** Tại điểm có hoành độ bằng 2 ;

3. Tại điểm có tung độ bằng 1 ;. **4.** Tại giao điểm (C) với trục tung ;

5. Có hệ số góc là 9;
6. Song song với đường thẳng $(d): 27x-3y+5=0$;
7. Vuông góc với đường thẳng $(d'): x+9y+2013=0$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=3x^2+6x$

1. Phương trình tiếp tuyến (t) tại $M(-1;3)$ có phương trình : $y=y'(-1)(x+1)+3$

Ta có: $y'(-1)=-3$, khi đó phương trình (t) là: $y=-3x+6$

Chú ý:

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M(x_0;f(x_0))$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại $M(x_0;y_0)$ là: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

2. Thay $x=2$ vào đồ thị của (C) ta được $y=21$.

Tương tự câu **1,** phương trình (t) là: $y=24x-27$

Chú ý:

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ biết hoành độ tiếp điểm $x=x_0$, $y_0=f(x_0)$, $y'(x_0)\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

3. Thay $y=1$ vào đồ thị của (C) ta được $x^2(x+3)=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=-3$.

Tương tự câu **1,** phương trình (t) là: $y=1$, $y=9x+28$

Chú ý: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ biết tung độ tiếp điểm bằng y_0. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm

Giải phương trình $f(x)=y_0$ ta tìm được các nghiệm x_0.

Tính $y'(x_0)$ $\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

4. Trục tung Oy : $x=0\Rightarrow y=1$.Tương tự câu **1,** phương trình (t) là: $y=1$

5. Gọi $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của đồ thị (C) của hàm số và tiếp tuyến (t).

Ta có : $y'(x_0)=3x_0^2+6x_0$, theo giả thiết $y'(x_0)=9$, tức là $3x_0^2+6x_0=9$ $\Rightarrow x_0=-3$ hoặc $x_0=1$. Tương tự câu **1**

6. Gọi $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của đồ thị (C) của hàm số và tiếp tuyến (t).

Theo bài toán: $(t)\,//\,(d): y=9x+\frac{5}{3}\Rightarrow y'(x_0)=9$. Tương tự câu **1**

7. Gọi $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của đồ thị (C) của hàm số và tiếp tuyến (t).

Theo bài toán: $(t)\perp(d'): y=-\frac{1}{9}x-\frac{2013}{9}\Rightarrow y'(x_0)=9$. Tương tự câu **1**

Ví dụ 2 .

1. Cho hàm số: $y=x^3-(m-1)x^2+(3m+1)x+m-2$. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng 1 đi qua điểm $A(2;-1)$.

2. Gọi (Cm) là đồ thị của hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+(m+3)x-3$ và (d) là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ x = 2. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d) bằng $\frac{7}{\sqrt{17}}$.

Lời giải.

1. Hàm số đã cho xác định với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-2(m-1)x+3m+1$

Với $x=1\Rightarrow y(1)=3m+1\Rightarrow y'(1)=m+6$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có $x=1$: $y=(m+6)(x-1)+3m+1$

Tiếp tuyến này đi qua $A(2;-1)$ nên có: $-1=m+6+3m+1\Leftrightarrow m=-2$

Vậy, $m=-2$ là giá trị cần tìm.

2. Hàm số đã cho xác định với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-2(2m+1)x+m+3$.

Phương trình tiếp tuyến (d) : $y=y'(2)(x-2)+y(2)$

$$y=(11-7m)(x-2)+7-6m=(11-7m)x+8m-15\Leftrightarrow(11-7m)x-y+8m-15=0$$

$$d(0,(d))=\frac{|8m-15|}{\sqrt{(11-7m)^2+1}}=\frac{7}{\sqrt{17}}\Leftrightarrow 17(8m-15)^2=49[(11-7m)^2+1]$$

$$\Leftrightarrow 1313m^2-3466m+2153=0\Leftrightarrow m=1,\ m=\frac{2153}{1313}$$

Ví dụ 3 :

1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y=-x^4-x^2+6$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=\frac{1}{6}x-1$.

2. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}$ có đồ thị là (C). Tìm trên đồ thị (C) điểm mà tại đó tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$.

Lời giải.

1. Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$

Gọi (t) là tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số và (t) vuông góc với đường thẳng $y=\frac{1}{6}x-1$, nên đường thẳng (t) có hệ số góc bằng -6.

Cách 1: Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến $\left(t\right)$ và đồ thị $\left(C\right)$ của hàm số . Khi đó, ta có phương trình: $y'\left(x_0\right)=-6 \Leftrightarrow -4x_0^3-2x_0=-6$

$\Leftrightarrow \left(x_0-1\right)\left(2x_0^2+2x_0+3\right)=0$ $(*)$. Vì $2x_0^2+2x_0+3>0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$

nên phương trình $(*) \Leftrightarrow x_0=1 \Rightarrow y_0=y\left(1\right)=4 \Rightarrow M\left(1;4\right)$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-6\left(x-1\right)+4=-6x+10$.

Cách 2: Phương trình $\left(t\right)$ có dạng $y=-6x+m$

$\left(t\right)$ tiếp xúc $\left(C\right)$ tại điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ khi hệ phương trình sau có nghiệm x_0

$$\begin{cases}-x_0^4-x_0^2+6=-6x_0+m\\ -4x_0^3-2x_0=-6\end{cases} \text{ có nghiệm } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases}x_0=1\\ m=10\end{cases}$$

2. Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=x^2-1$

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C) \Leftrightarrow y_0=\frac{1}{3}x_0^3-x_0+\frac{2}{3}$,

Tiếp tuyến Δ tại điểm M có hệ số góc: $y'(x_0)=x_0^2-1$

Đường thẳng d: $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ có hệ số góc $k_2=-\frac{1}{3}$

$$\Delta \perp d \Leftrightarrow k_1.k_2=-1 \Leftrightarrow (x_0^2-1)\left(-\frac{1}{3}\right)=-1 \Leftrightarrow x_0^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=2 \Rightarrow y_0=\frac{4}{3}\\ x_0=-2 \Rightarrow y_0=0\end{array}\right.$$

Vậy, có 2 điểm $M\left(-2;0\right)$, $\left(2;\frac{4}{3}\right)$ là tọa độ cần tìm.

Ví dụ 4

1. Cho hàm số $y=\frac{3-x}{x+2}$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (C) biết (d) cách đều hai điểm $A\left(-1;-2\right)$ và $B\left(1;0\right)$.

2. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x-1$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (C) biết (d) cách đều hai điểm $A\left(2;7\right)$ và $B\left(-2;7\right)$.

Lời giải.

1. *Cách 1.* Phương trình tiếp tuyến (d) có dạng

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ (x_0 là hoành độ tiếp điểm của (d) và (C)).

$$=-\frac{5}{(x_0+2)^2}(x-x_0)+\frac{3-x_0}{x_0+2}=-\frac{5}{(x_0+2)^2}x+\frac{(-x_0^2+6x_0+6)}{(x_0+2)^2}$$

$\Leftrightarrow 5x+(x_0+2)^2y+x_0^2-6x_0-6=0$

$$d(A,(d))=d(B,(d))\Leftrightarrow \frac{\left|-5-2(x_0+2)^2+x_0^2-6x_0-6\right|}{\sqrt{25+(x_0+2)^4}}=\frac{\left|5+x_0^2-6x_0-6\right|}{\sqrt{25+(x_0+2)^4}}$$

$$\Leftrightarrow \left|x_0^2+14x_0+19\right|=\left|x_0^2-6x_0-1\right|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0^2+14x_0+19=x_0^2-6x_0-1\\x_0^2+14x_0+19=-x_0^2+6x_0+1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=-1\\x_0^2+4x_0+9=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x_0=-1.$$

Vậy phương trình $(d):\ y=-5x-1$

Cách 2. Tiếp tuyến (d) cách đều hai điểm A, B suy ra hoặc (d) song song với đường thẳng AB hoặc (d) đi qua trung điểm I(0; - 1) của đoạn AB.

* Trường hợp 1: (d) //AB.

Hệ số góc của đường thẳng AB: $k_{AB}=\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=1$.

(d) // AB suy ra hệ số góc của (d) : $f'(x_0)=1\Rightarrow -\dfrac{5}{(x_0+2)^2}=1$ (*) . Phương trình (*) vô nghiệm do đó trường hợp này không xảy ra.

* Trường hợp 2: (d) qua trung điểm I của đoạn AB.

Phương trình (d) có dạng y = kx – 1.

(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ $x_0\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{3-x_0}{x_0+2}=kx_0-1\ (2)\\-\dfrac{5}{(x_0+2)^2}=k\ (3)\end{cases}$ có nghiệm x_0.

Thay $k=-\dfrac{5}{(x_0+2)^2}$ vào (2) ta được $\dfrac{3-x_0}{x_0+2}=-\dfrac{5}{(x_0+2)^2}-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_0\neq -2\\(3-x_0)(x_0+2)=-5-(x_0+2)^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x_0\neq -2\\x_0=-1\end{cases}\Leftrightarrow x_0=-1$$

Thay $x_0=-1$ vào (2) ta được $k=-5$.

Vậy phương trình $(d):\ y=-5x-1$

2. Phương trình tiếp tuyến (D) có dạng :

$$y=(3x_0^2-12x_0+9)(x-x_0)+x_0^3-6x_0^2+9x_0-1=(3x_0^2-12x_0+9)x-2x_0^3+6x_0^2-1$$

$$\Leftrightarrow (3x_0^2-12x_0+9)x-y-2x_0^3+6x_0^2-1=0\ (*)$$

$$d(A,(D))=d(B,(D))\Leftrightarrow \frac{\left|2(3x_0^2-12x_0+9)-7-2x_0^3+6x_0^2-1\right|}{\sqrt{(3x_0^2-12x_0+9)^2+1}}=\frac{\left|-2(3x_0^2-12x_0+9)-7-2x_0^3+6x_0^2-1\right|}{\sqrt{(3x_0^2-12x_0+9)^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow\left|-2x_0^3+12x_0^2-24x_0+10\right|=\left|-2x_0^3+24x_0-26\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2x_0^3+12x_0^2-24x_0+10=-2x_0^3+24x_0-26\quad(1)\\-2x_0^3+12x_0^2-24x_0+10=2x_0^3-24x_0+26\quad(2)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}12x_0^2-48x_0+36=0\\4x_0^3-12x_0^2+16=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=3\vee x_0=1\\x_0=-1\vee x_0=2\end{array}\right.$$

Lần lượt thay $x_0=3\vee x_0=1\vee x_0=-1\vee x_0=2$ vào (*) ta được phương trình tiếp tuyến (D) là

$y+1=0,\ y-3=0,\ y=24x+7,\ y=-3x+7.$

Ví dụ 5 Viết phương trình tiếp tuyến d với đồ thị (C):

1. $y=x^3-3x^2+2$, biết d cắt các trục $Ox,\ Oy$ lần lượt tại $A,\ B$ thỏa mãn: $OB=9OA$.

2. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C): $y=x^3-6x^2+9x-2$ tại điểm $M,$ biết M cùng 2 điểm cực trị của (C) tạo thành tam giác có diện tích bằng 6.

Lời giải.

1. Gọi $M\left(x_0;y\left(x_0\right)\right)$ là toạ độ tiếp điểm.

Theo bài toán, đường thẳng d chính là đường thẳng đi qua 2 điểm phân biệt A,B.

Gọi β là góc tạo bởi giữa d và Ox, do đó d có hệ số góc $k=\pm\tan\beta$

Dễ thấy, tam giác AOB vuông tại O, suy ra $\tan\beta=\frac{OB}{OA}=9$

Nói khác hơn đường thẳng d có hệ số góc là ±9, nghĩa là ta luôn có: $\left[\begin{array}{l}y'\left(x_0\right)=9\\y'\left(x_0\right)=-9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x_0^2-6x_0-9=0\\3x_0^2-6x_0+9=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x_0^2-2x_0-3=0\Leftrightarrow x_0=-1$ hoặc $x_0=3$ vì $x_0^2-2x_0+3>0,\forall x_0\in\mathbb{R}$.

Với $x_0=-1$ suy ra phương trình tiếp tuyến $y=9x+7$

Với $x_0=3$ suy ra phương trình tiếp tuyến $y=9x-25$

Vậy, có 2 tiếp tuyến $y=9x+7$, $y=9x-25$ thỏa đề bài.

2. Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị $A\left(1;2\right),\ B\left(3;-2\right)$ và đường thẳng đi qua 2 cực trị là AB:

$2x+y-4=0$.

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tiếp điểm của đồ thị (C) của hàm số và tiếp tuyến (d) cần tìm. Khi đó

$y_0=x_0^3-6x_0^2+9x_0-2$

Ta có: $AB=2\sqrt5$, $d\left(M;AB\right)=\frac{\left|2x_0+y_0-4\right|}{\sqrt5}$

Giả thiết $S_{MAB}=6\Leftrightarrow\frac12.AB.d\left(M;AB\right)=6\ \Leftrightarrow\left|2x_0+y_0-4\right|=6$

$\Leftrightarrow 2x_0+y_0=10$ hoặc $2x_0+y_0=-2$

TH1: Tọa độ M thỏa mãn hệ: $\begin{cases} 2x_0+y_0=-2 \\ y_0=x_0^3-6x_0^2+9x_0-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0=-2-2x_0 \\ x_0\left(x_0^2-6x_0+11\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0=-2 \\ x_0=0 \end{cases}$ hay $M(0;-2)$

Tiếp tuyến tại M là: $y=9x-2$.

TH2: Tọa độ M thỏa mãn hệ: $\begin{cases} 2x_0+y_0=10 \\ y_0=x_0^3-6x_0^2+9x_0-2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0=10-2x_0 \\ (x_0-4)\left(x_0^2-6x_0+11\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0=2 \\ x_0=4 \end{cases}$ hay $M(4;2)$

Tiếp tuyến tại M là: $y=9x-34$.

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài: $y=9x-2$ và $y=9x-34$

Ví dụ 6 Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+3}$.

1. Gọi M là một điểm thuộc (C) có khoảng cách đến trục hoành độ bằng 5. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại M

2. Gọi (d) là một tiếp tuyến của (C), (d) cắt đường tiệm cận đứng của (C) tại A, cắt đường tiệm cận ngang của (C) tại B và gọi I là tâm đối xứng của (C). Viết phương trình tiếp tuyến (d) biết:

i) IA = 4IB. **ii)** IA + IB nhỏ nhất

Lời giải.

1. Khoảng cách từ M đến trục Ox bằng 5 $\Leftrightarrow y_M=\pm 5$.

TH1: $\begin{cases} M\in(C) \\ y_M=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M=-5 \\ -5=\dfrac{x_M-1}{x_M+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=-\dfrac{7}{3} \\ y_M=-5 \end{cases}$

TH2: $\begin{cases} M\in(C) \\ y_M=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M=5 \\ 5=\dfrac{x_M-1}{x_M+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=-4 \\ y_M=5 \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(-\dfrac{7}{3};-5\right)$ là $y=9x+16$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(-4;5)$ là $y=4x+21$.

2. i) Ta có ABI bằng góc hình học hợp bởi tiếp tuyến (d) với trục hoành suy ra hệ số góc của (d) là

$k\pm\tan ABI=\pm\dfrac{IA}{IB}=\pm 4$

Phương trình tiếp tuyến $(d): y=4x+5$ hoặc $y=4x+21$.

ii) Phương trình tiếp tuyến (d) có dạng : $y=\dfrac{4}{(x_0+3)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0-1}{x_0+3}=\dfrac{4}{(x_0+3)^2}x+\dfrac{x_0^2-2x_0-3}{(x_0+3)^2}$.

Tiệm cận đứng của (C) : $(D_1): x = -3$

Tiệm cận ngang của (C) : $(D_2): y = 1.$

A là giao điểm của (d) và $(D_1) \Rightarrow y_A = \dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 15}{(x_0+3)^2}$

B là giao điểm của (C) với $(D_2) \Rightarrow x_B = 2x_0 + 3$.

$$IA + IB = |y_A - y_I| + |x_B - x_I| = \left|\frac{x_0^2 - 2x_0 - 15}{(x_0+3)^2} - 1\right| + |2x_0 + 6| = \left|\frac{8}{x_0+3}\right| + |2x_0+6|$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ,ta có

$$IA + IB \ge 2\sqrt{\left|\frac{8}{x_0+3}\right||2x_0+6|} = 8.$$

$$IA + IB = 8 \Leftrightarrow \left|\frac{8}{x_0+3}\right| = |2x_0+6| \Leftrightarrow (x_0+3)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = -5 \end{array}\right.$$

$\min(IA + IB) = 8 \Rightarrow d:\ y = x,\quad y = x + 8$

Ví dụ 7

1. Biết rằng trên đồ thị $y = x^3 - (m+1)x^2 + (4m+2)x + 1,\ (C_m)$ tồn tại đúng 1 điểm mà từ đó kẻ được tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 10y + 2013 = 0$ .Viết phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại điểm đó

2. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) : $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$ tại những điểm thuộc đồ thị có khoảng cách đến đường thẳng (d): $3x + 4y - 2 = 0$ bằng 2.

Lời giải.

1. Gọi tiếp điểm là $M(a;b)$, tiếp tuyến tại M có hệ số góc là $k = y'(a) = 3a^2 - 2(m+1)a + 4m + 2$, theo giả thiết suy ra $k = 10$

Trên đồ thị chỉ có 1 điểm nên phương trình $3a^2 - 2(m+1)a + 4m - 8 = 0$ có nghiệm kép hay $\Delta' = 0$ tức $m = 5$, thay vào ta được $a = 2 \Rightarrow M(2;29)$.

Vậy, tiếp tuyến cần tìm là $y = 10x + 9$

2. Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm thuộc đồ thị (C), khi đó: $y_0 = y(x_0) = \dfrac{2x_0+3}{x_0+1}$

Ta có: $d[M,(d)] = 2 \Leftrightarrow \dfrac{|3x_0 + 4y_0 - 2|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 2 \Leftrightarrow 3x_0 + 4y_0 - 12 = 0$ hoặc

$3x_0 + 4y_0 + 8 = 0$

TH1: $3x_0 + 4y_0 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x_0 + 4\left(\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}\right) - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x_0^2 - x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$

hoặc $x_0 = \frac{1}{3}$

TH2: $3x_0 + 4y_0 + 8 = 0 \Leftrightarrow 3x_0 + 4\left(\frac{2x_0+3}{x_0+1}\right) + 8 = 0 \Leftrightarrow 3x_0^2 + 19x_0 + 20 = 0$

$\Leftrightarrow x_0 = -5$ hoặc $x_0 = -\frac{4}{3}$

Phương trình tiếp tuyến (d) tại M thuộc đồ thị (C) có dạng:

$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$ trong đó và $y'(x_0) = \frac{-1}{(x_0+1)^2}$, $x_0 \neq -1$.

Phương trình tiếp tuyến (d_1) tại $M_1(0;3)$ là $y = -x + 3$.

Phương trình tiếp tuyến (d_2) tại $M_2\left(\frac{1}{3};\frac{11}{4}\right)$ là $y = -\frac{9}{16}x + \frac{47}{16}$.

Phương trình tiếp tuyến (d_3) tại $M_3\left(-5;\frac{7}{4}\right)$ là $y = -\frac{1}{16}x + \frac{23}{16}$.

Phương trình tiếp tuyến (d_4) tại $M_4\left(-\frac{4}{3};-1\right)$ là $y = -9x - 13$.

Vậy, có 4 tiếp tuyến thỏa đề bài:

$$y = -x + 3,\ y = -\frac{9}{16}x + \frac{47}{16},\ y = -\frac{1}{16}x + \frac{23}{16},\ y = -9x - 13.$$

Ví dụ 8

1. Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x-2}$ (C) và đường thẳng $(d_m): y = 2x + m$. Tìm m để đường thẳng (d_m) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tâm đối xứng I của (C) cách đều hai tiếp tuyến với (C) tại các điểm A, B.

2. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C). Tìm trên đồ thị hai điểm A, B sao cho tiếp tuyến tại A và B song song với nhau và khoảng cách từ O đến đường thẳng đi qua hai điểm A, B bằng $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải.

1. $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Hoành độ giao điểm của đường thẳng (d_m) và (C) là nghiệm của phương trình

$\frac{x+3}{x-2} = 2x + m \Leftrightarrow 2x^2 + (m-5)x - 2m - 3 = 0\ (\forall x \neq 2)$

Để (d_m) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi phương trình trên có hai nghiệm phân biệt khác 2 nên phải có:

$\begin{cases}\Delta > 0 \\ g(2) \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m-5)^2 + 4.2.(2m+3) > 0 \\ 2.2^2 + 2(m+5) - 2m - 3 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+3)^2 + 40 > 0\ \forall m \in \mathbb{R} \\ 15 \neq 0\end{cases}$

Các tiếp tuyến:

$(\Delta_1): y = -\dfrac{5}{(x_1-2)^2}(x-x_1) + 1 + \dfrac{5}{x_1-2}$, $(\Delta_1): y = -\dfrac{5}{(x_2-2)^2}(x-x_2) + 1 + \dfrac{5}{x_2-2}$

$d(I;\Delta_1) = d(I;\Delta_2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x_1-2)^2(x_2-2)^2 = 25 \\ (x_1-2)^2 = (x_2-2)^2\end{array}\right. \Rightarrow m = -3.$

Vậy, $m = -3$ là giá trị cần tìm.

2. Gọi $A\left(x_1; y_1 = x_1^3 - 3x_1^2 + 1\right)$, $B\left(x_2; y_2 = x_2^3 - 3x_2^2 + 1\right)$ là 2 điểm cần tìm với $x_1 \neq x_2$

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$

Hệ số góc của các tiếp tuyến của (C) tại A và B lần lượt là

$k_1 = 3x_1^2 - 6x_1, k_2 = 3x_2^2 - 6x_2$

Tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau nên

$k_1 = k_2 \Leftrightarrow 3x_1^2 - 6x_1 = 3x_2^2 - 6x_2$

$\Leftrightarrow 3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 6(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 - x_1$

Hệ số góc của đường thẳng AB là $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{x_1^3 - x_2^3 - 3(x_1^2 - x_2^2)}{x_2 - x_1}$

$k = (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) = 4 - x_1(2 - x_1) - 6 = -2x_1 - 2$

Phương trình đường thẳng AB là $y = (-2x_1 - 2)(x - x_1) + x_1^3 - 3x_1^2 + 1$

$\Leftrightarrow (-2x_1 - 2)x - y - + 2x_1 + 1 = 0$

$$\Rightarrow d(O, AB) = \frac{\left|-x_1^2 + 2x_1 + 1\right|}{\sqrt{\left(x_1^2 - 2x_1 - 2\right)^2 + 1}} = \frac{\left|-x_1^2 + 2x_1 + 1\right|}{\sqrt{\left(-x_1^2 + 2x_1 + 1 + 1\right)^2 + 1}} = \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{5}\left|-x_1^2 + 2x_1 + 1\right| = \sqrt{2}\sqrt{\left(-x_1^2 + 2x_1 + 1 + 1\right)^2 + 1}$ .Bình phương 2 vế và rút gọn được:

$$3\left(-x_1^2 + 2x_1 + 1\right)^2 - 4\left(-x_1^2 + 2x_1 + 1\right) - 4 = 0$$

$\Leftrightarrow -x_1^2 + 2x_1 + 1 = 2$ (1) hoặc $-x_1^2 + 2x_1 + 1 = -\dfrac{2}{3}$ (2)

Giải (1) ta được $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1$

Giải (2) ta được $x_1 = \dfrac{3 - 2\sqrt{6}}{3}$ hoặc $x_1 = \dfrac{3 + 2\sqrt{6}}{3}$

Vậy, các điểm cần tìm là $A\left(\frac{3+2\sqrt{6}}{3};-\frac{9+2\sqrt{6}}{9}\right), B\left(\frac{3-2\sqrt{6}}{3};\frac{-9+2\sqrt{6}}{9}\right)$ hoặc ngược lại.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-6x+1$ (C)

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết

Câu 1. Hoành độ tiếp điểm bằng 1

A. $y=3x-6$ **B.** $y=3x-7$ **C.** $y=3x-4$ **D.** $y=3x-5$

***Bài làm* 1.** Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm

Ta có: $y'=3x^2+6x-6$.

Ta có: $x_0=1\Rightarrow y_0=-1, y'(1)=3$

Phương trình tiếp tuyến là: $y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0=3(x-1)-1=3x-4$

Câu 2. Tung độ tiếp điểm bằng 9

A. $\left[\begin{array}{l} y=18x+81 \\ y=-9x \\ y=9x-27 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} y=x+81 \\ y=9x \\ y=9x-2 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} y=18x+1 \\ y=-9x \\ y=9x-7 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} y=x+81 \\ y=-9x \\ y=9x-2 \end{array}\right.$

***Bài làm* 2.** Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm

Ta có: $y'=3x^2+6x-6$.

Ta có: $y_0=9\Leftrightarrow x_0^3+3x_0^2-6x_0-8=0 \Leftrightarrow x_0=-1, x_0=2, x_0=-4$.

- $x_0=-4\Rightarrow y'(x_0)=18$. Phương trình tiếp tuyến là: $y=18(x+4)+9=18x+81$
- $x_0=-1\Rightarrow y'(x_0)=-9$. Phương trình tiếp tuyến là: $y=-9(x+1)+9=-9x$
- $x_0=2\Rightarrow y'(x_0)=18$. Phương trình tiếp tuyến là: $y=18(x-2)+9=18x-27$.

Câu 3. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{18}x+1$

A. : $y=18x+8$ và $y=18x-27$. **B.** : $y=18x+8$ và $y=18x-2$.

C. : $y=18x+81$ và $y=18x-2$. **D.** : $y=18x+81$ và $y=18x-27$.

***Bài làm* 3.** Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm

Ta có: $y'=3x^2+6x-6$.

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{18}x+1$ nên

Ta có: $y'(x_0)=15\Leftrightarrow x_0^2+2x_0-8=0\Leftrightarrow x_0=-4, x_0=2$

Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến: $y=18x+81$ và $y=18x-27$.

Câu 4. Tiếp tuyến đi qua điểm $N(0;1)$.

A. $y=-\frac{33}{4}x+11$ **B.** $y=-\frac{33}{4}x+12$ **C.** $y=-\frac{33}{4}x+1$ **D.** $y=-\frac{33}{4}x+2$

✍***Bài làm* 4.** Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm

Ta có: $y'=3x^2+6x-6$.

Phương trình tiếp tuyến có dạng: $y=(3x_0^2+6x_0-6)(x-x_0)+x_0^3+3x_0^2-6x_0+1$

Vì tiếp tuyến đi qua $N(0;1)$ nên ta có:

$1=(3x_0^2+6x_0-6)(-x_0)+x_0^3+3x_0^2-6x_0+1$

$\Leftrightarrow 2x_0^3+3x_0^2=0 \Leftrightarrow x_0=0, x_0=-\frac{3}{2}$

- $x_0=0 \Rightarrow y'(x_0)=-6$. Phương trình tiếp tuyến: $y=-6x+1$.
- $x_0=-\frac{3}{2} \Rightarrow y_0=\frac{107}{8}, y'(x_0)=-\frac{33}{4}$. Phương trình tiếp tuyến

$y'=-\frac{33}{4}\left(x+\frac{3}{2}\right)+\frac{107}{8}=-\frac{33}{4}x+1$.

Bài 2. Cho hàm số $y=x^3-3x+1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết:

Câu 1. Hoành độ tiếp điểm bằng 0

A. $y=-3x+12$ **B.** $y=-3x+11$ **C.** $y=-3x+1$ **D.** $y=-3x+2$

✍***Bài làm* 1.** Ta có: $y'=3x^2-3$. Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm

Ta có: $x_0=0 \Rightarrow y_0=1, y'(x_0)=-3$

Phương trình tiếp tuyến: $y=-3x+1$.

Câu 2. Tung độ tiếp điểm bằng 3

A. $y=9x-1$ hay $y=3$ **B.** $y=9x-4$ hay $y=3$

C. $y=9x-3$ hay $y=3$ **D.** $y=9x-13$ hay $y=2$

✍***Bài làm* 2.** Ta có: $y'=3x^2-3$. Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm

Ta có: $y_0=3 \Leftrightarrow x_0^3-3x_0-2=0 \Leftrightarrow x_0=2, x_0=-1$

- $x_0=-1 \Rightarrow y'(x_0)=0$. Phương trình tiếp tuyến: $y=3$
- $x_0=2 \Rightarrow y'(x_0)=9$. Phương trình tiếp tuyến:

$y=9(x-2)+3=9x-13$.

Câu 3. Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 9

A. $y = 9x - 1$ hay $y = 9x + 17$ **B.** $y = 9x - 1$ hay $y = 9x + 1$

C. $y = 9x - 13$ hay $y = 9x + 1$ **D.** $y = 9x - 13$ hay $y = 9x + 17$

✍***Bài làm* 3.** Ta có: $y' = 3x^2 - 3$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Ta có: $y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$

- $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 3$. Phương trình tiếp tuyến:

$y = 9(x-2) + 3 = 9x - 13$.

- $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -1$. Phương trình tiếp tuyến:

$y = 9(x+2) - 1 = 9x + 17$.

Câu 4. Tiếp tuyến vuông góc với trục Oy.

A. $y = 2, y = -1$ **B.** $y = 3, y = -1$ **C.** $y = 3, y = -2$ **D.** $x = 3, x = -1$

✍***Bài làm* 4.** Ta có: $y' = 3x^2 - 3$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Vì tiếp tuyến vuông góc với Oy nên ta có: $y'(x_0) = 0$

Hay $x_0 = \pm 1$. Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến: $y = 3, y = -1$.

Bài 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số: $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$ biết:

Câu 1. Tung độ tiếp điểm bằng 1

A. $\left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 8\sqrt{2}x - 5 \\ y = -8\sqrt{2}x - 5 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 8\sqrt{2}x - 15 \\ y = -8\sqrt{2}x - 15 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 8\sqrt{2}x - 1 \\ y = -8\sqrt{2}x - 1 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 8\sqrt{2}x - 10 \\ y = -8\sqrt{2}x - 10 \end{array}\right.$

✍***Bài làm* 1. .** Ta có: $y' = 8x^3 - 8x$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y_0 = 1 \Leftrightarrow 2x_0^4 - 4x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0, x_0 = \pm\sqrt{2}$

- $x_0 = 0 \Rightarrow y'(x_0) = 0$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = 1$
- $x_0 = \sqrt{2} \Rightarrow y'(x_0) = 8\sqrt{2}$. Phương trình tiếp tuyến

$y = 8\sqrt{2}\left(x - \sqrt{2}\right) + 1 = 8\sqrt{2}x - 15$

- $x_0 = -\sqrt{2} \Rightarrow y'(x_0) = -8\sqrt{2}$. Phương trình tiếp tuyến

$y = -8\sqrt{2}\left(x + \sqrt{2}\right) + 1 = -8\sqrt{2}x - 15$.

Câu 2. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 48x - 1$.

A. $y = 48x - 9$ **B.** $y = 48x - 7$ **C.** $y = 48x - 10$ **D.** $y = 48x - 79$

✍***Bài làm* 2. .** Ta có: $y' = 8x^3 - 8x$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=48x-1$

Nên ta có: $y'(x_0)=48 \Leftrightarrow x_0^3-x_0-6=0 \Leftrightarrow x_0=2$

Suy ra $y_0=17$. Phương trình tiếp tuyến là:

$y=48(x-2)+17=48x-79$.

Bài 4. Cho hàm số $y=x^4+x^2+1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết:

Câu 1. Tung độ tiếp điểm bằng 1

A. $y=2$ **B.** $y=1$ **C.** $y=3$ **D.** $y=4$

***Bài làm* 1.** Ta có: $y'=4x^3+2x$. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm

Ta có $y_0=1 \Leftrightarrow x_0^4+x_0^2=0 \Leftrightarrow x_0=0$, $y'(x_0)=0$

Phương trình tiếp tuyến: $y=1$

Câu 2. Tiếp tuyến song song với đường thng $y=6x-1$

A. $y=6x-2$ **B.** $y=6x-7$ **C.** $y=6x-8$ **D.** $y=6x-3$

***Bài làm* 2.** Ta có: $y'=4x^3+2x$. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=6x-1$ nên ta có:

$y'(x_0)=6 \Leftrightarrow 4x_0^3+2x_0=6 \Leftrightarrow x_0=1 \Rightarrow y_0=3$

Phương trình tiếp tuyến: $y=6x-3$.

Câu 3. Tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1;3)$.

A. $y=-6x-2$ **B.** $y=-6x-9$ **C.** $y=-6x-3$ **D.** $y=-6x-8$

***Bài làm* 3.** Ta có: $y'=4x^3+2x$. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm

Phương trình tiếp tuyến có dạng:

$y=\left(4x_0^3+2x_0\right)\left(x-x_0\right)+x_0^4+x_0^2+1$

Vì tiếp tuyến đi qua $M(-1;3)$ nên ta có:

$3=\left(4x_0^3+2x_0\right)\left(-1-x_0\right)+x_0^4+x_0^2+1 \Leftrightarrow 3x_0^4+4x_0^3+x_0^2+2x_0+2=0$

$\Leftrightarrow (x_0+1)^2(3x_0^2-2x_0+2)=0 \Leftrightarrow x_0=-1 \Rightarrow y_0=3, y'(x_0)=-6$

Phương trình tiếp tuyến: $y=-6x-3$.

Bài 5. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết:

Câu 1. Tung độ tiếp điểm bằng -2.

A. $\left[\begin{array}{l} y=-x+7 \\ y=-x-1 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} y=-x+7 \\ y=-x-21 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} y=-x+27 \\ y=-x-21 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} y=-x+27 \\ y=-x-1 \end{array}\right.$

$\Delta: y=\dfrac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0+2}{x_0-1}$.

***Bài làm* 1.** Hàm số xác định với mọi $x\neq 1$. Ta có: $y'=\dfrac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

Vì tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1 nên ta có

$-\dfrac{4}{(x_0-1)^2}=-1\Leftrightarrow x_0=3,x_0=-1$

- $x_0=2\Rightarrow y_0=4\Rightarrow\Delta: y=-x+7$
- $x_0=-1\Rightarrow y_0=0\Rightarrow\Delta: y=-x-1$

Câu 2. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y=-4x+1$.

A. $\left[\begin{array}{l} y=-4x+2 \\ y=-4x+14 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} y=-4x+21 \\ y=-4x+14 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} y=-4x+2 \\ y=-4x+1 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} y=-4x+12 \\ y=-4x+14 \end{array}\right.$

***Bài làm* 2.** Hàm số xác định với mọi $x\neq 1$. Ta có: $y'=\dfrac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y=-4x+1$ nên ta có:

$y'(x_0)=-4\Leftrightarrow\dfrac{-4}{(x_0-1)^2}=-4\Leftrightarrow x_0=0,x_0=2$.

- $x_0=0\Rightarrow y_0=2\Rightarrow\Delta: y=-4x+2$
- $x_0=2\Rightarrow y_0=6\Rightarrow\Delta: y=-4x+14$.

Câu 3. Tiếp tuyến đi qua điểm $A(4;3)$

A. $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{9}x+\frac{1}{9} \\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{9}x+\frac{31}{9} \\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{31}{4} \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{9}x+\frac{1}{9} \\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{31}{4} \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{9}x+\frac{31}{9} \\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4} \end{array}\right.$

***Bài làm* 3.** Hàm số xác định với mọi $x\neq 1$. Ta có: $y'=\dfrac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

Vì tiếp tuyến đi qua $A(4;3)$ nên ta có: $3=\dfrac{-4}{(x_0-1)^2}(4-x_0)+\dfrac{2x_0+2}{x_0-1}$

$\Leftrightarrow 3(x_0-1)^2 = 4(x_0-4)+2(x_0^2-1) \Leftrightarrow x_0^2-10x_0-21=0 \Leftrightarrow x_0=-3, x_0=7$

- $x_0=7 \Rightarrow y_0=\frac{8}{3}, y'(x_0)=-\frac{1}{9}$. Phương trình tiếp tuyến

$y=-\frac{1}{9}(x-7)+\frac{8}{3}=-\frac{1}{9}x+\frac{31}{9}$.

- $x_0=-3 \Rightarrow y_0=1, y'(x_0)=-\frac{1}{4}$. Phương trình tiếp tuyến

$y=-\frac{1}{4}(x+3)+1=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$.

Câu 4. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

A. $\left[\begin{array}{l} y=-x-11 \\ y=-x+7 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} y=-x-11 \\ y=-x+17 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} y=-x-1 \\ y=-x+17 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} y=-x-1 \\ y=-x+7 \end{array}\right.$

***Bài làm* 4.** Hàm số xác định với mọi $x \neq 1$. Ta có: $y'=\frac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

Vì tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân nên tiếp tuyến phải vuông góc với một trong hai đường phân giác $y=\pm x$, do đó hệ số góc của tiếp tuyến bằng ± 1 hay $y'(x_0)=\pm 1$. Mà $y'<0,\ \forall x \neq 1$ nên ta có

$y'(x_0)=-1 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x_0-1)^2}=-1 \Leftrightarrow x_0=-1, x_0=3$

- $x_0=-1 \Rightarrow y_0=0 \Rightarrow \Delta: y=-x-1$
- $x_0=3 \Rightarrow y_0=4 \Rightarrow \Delta: y=-x+7$.

Bài 6. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết:

Câu 1. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=\frac{1}{3}x+2$

A. $y=-3x-11$ hay $y=-3x+11$ **B.** $y=-3x-11$ hay $y=-3x+1$

C. $y=-3x-1$ hay $y=-3x+1$ **D.** $y=-3x-1$ hay $y=-3x+11$

***Bài làm* 1.** Ta có $y'=\frac{-3}{(x-1)^2}$. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=\frac{1}{3}x+2$ nên ta có

$y'(x_0)=-3 \Leftrightarrow \frac{-3}{(x_0-1)^2}=-3 \Leftrightarrow x_0=0, x_0=2$

- $x_0=0 \Rightarrow y_0=-1$, phương trình tiếp tuyến là:

$y=-3x-1$

- $x_0=2\Rightarrow y_0=5$, phương trình tiếp tuyến là:

$y=-3(x-2)+5=-3x+11$.

Câu 2. Tiếp tuyến cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\frac{1}{6}$

A. $y=-3x+1, y=-3x+1, y=-12x+2, y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$

B. $y=-3x+1, y=-3x-11, y=-12x-2, y=-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$

C. $y=-3x+11, y=-3x-11, y=-12x, y=-\frac{4}{3}x-\frac{3}{4}$

D. $y=-3x+1, y=-3x+11, y=-12x+2, y=-\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$

✍***Bài làm 2.*** Ta có $y'=\frac{-3}{(x-1)^2}$. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến Δ có dạng:

$y=\frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0+1}{x_0-1}$.

- $\Delta\cap Ox=A:\begin{cases}y=0\\ \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0+1}{x_0-1}=0\end{cases}$

Suy ra $A\left(\frac{2x_0^2+2x_0-1}{3};0\right)$.

- $\Delta\cap Oy=B:\begin{cases}x=0\\ y=\frac{3x_0}{(x_0-1)^2}+\frac{2x_0+1}{x_0-1}\end{cases}$

Suy ra: $B\left(0;\frac{2x_0^2+2x_0-1}{(x_0-1)^2}\right)$

Diện tích tam giác OAB: $S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{6}\left(\frac{2x_0^2+2x_0-1}{x_0-1}\right)^2$

Suy ra $S_{OAB}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow\left(\frac{2x_0^2+2x_0-1}{x_0-1}\right)^2=1$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x_0^2+2x_0-1=x_0-1\\ 2x_0^2+2x_0-1=-x_0+1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x_0^2+x_0=0\\ 2x_0^2+3x_0-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0, x_0=-\frac{1}{2}\\ x_0=\frac{1}{2}, x_0=-2\end{array}\right.$

Từ đó ta tìm được các tiếp tuyến là:

$y=-3x+1, y=-3x+11, y=-12x+2, y=-\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$.

Câu 3. Tiếp tuyến đi qua $A(-7;5)$.

A. $y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4},\ y=\frac{3}{16}x+\frac{29}{16}$

B. $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2},\ y=\frac{3}{16}x+\frac{2}{16}$

C. $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4},\ y=\frac{3}{16}x+\frac{9}{16}$

D. $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4},\ y=\frac{3}{16}x+\frac{29}{16}$

✍***Bài làm* 3.** Ta có $y'=\frac{-3}{(x-1)^2}$. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Do tiếp tuyến đi qua $A(-7;5)$ nên ta có:

$$5=\frac{-3}{(x_0-1)^2}(-7-x_0)+\frac{2x_0+1}{x_0-1}\Leftrightarrow x_0^2-4x_0-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\\x_0=5\end{array}\right.$$

Từ đó ta tìm được các tiếp tuyến là: $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4},\ y=\frac{3}{16}x+\frac{29}{16}$.

Bài 7. Cho hàm số $y=x^4-8x^2+m+1\ (C_m)$. Giả sử rằng tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại điểm có hoành độ $x_0=1$ luôn cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt. Tìm tọa độ các giao điểm.

A. $A(1;m-6),\ B\left(-1\pm\sqrt{3};m+18\pm\sqrt{3}\right)$

B. $A(1;m-6),\ B\left(-1\pm\sqrt{7};m+18\mp\sqrt{7}\right)$

C. $A(1;m-6),\ B\left(-1\pm\sqrt{2};m+18\pm\sqrt{2}\right)$

D. $A(1;m-6),\ B\left(-1\pm\sqrt{6};m+18\mp\sqrt{6}\right)$

Ta có: $y'=4x^3-16x$

Vì $x_0=1\Rightarrow y_0=m-6,\ y'(x_0)=-12$. Phương trình tiếp tuyến d của (C_m) tại điểm có hoành độ $x_0=1$ là:

$y=-12(x-1)+m-6=-12x+m+6$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với d

$x^4-8x^2+m+1=-12x+m+6\Leftrightarrow x^4-8x^2+12x-5=0$

$\Leftrightarrow(x-1)^2(x^2+2x-5)=0\Leftrightarrow x=1, x=-1\pm\sqrt{6}$

Vậy d và (C_m) luôn cắt nhau tại ba điểm phân biệt

$A(1;m-6),\ B\left(-1\pm\sqrt{6};m+18\mp\sqrt{6}\right)$

Bài 8. Cho hàm số $y=\frac{2x+m+1}{x-1}$ (C_m). Tìm m để tiếp tuyến của (C_m)

Câu 1. Tại điểm có hoành độ $x_0=0$ đi qua $A(4;3)$

A. $m=-\frac{16}{5}$ **B.** $m=-\frac{6}{5}$ **C.** $m=-\frac{1}{5}$ **D.** $m=-\frac{16}{15}$

✍***Bài làm* 1.** Ta có: $y'=\frac{-m-3}{(x-1)^2}$

Vì $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -m - 1,\ y'(x_0) = -m - 3$. Phương trình tiếp tuyến d của (Cm) tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là:

$y = (-m-3)x - m - 1$

Tiếp tuyến đi qua A khi và chỉ khi: $3 = (-m-3)4 - m - 1 \Leftrightarrow m = -\frac{16}{5}$.

Câu 2. Tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{25}{2}$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=-2; m=-\frac{23}{9} \\ m=-7; m=-\frac{28}{9} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m=2; m=\frac{23}{9} \\ m=-7; m=-\frac{28}{9} \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m=-2; m=-\frac{23}{9} \\ m=7; m=\frac{28}{9} \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m=2; m=-\frac{23}{9} \\ m=-7; m=\frac{28}{9} \end{array}\right.$

✍***Bài làm* 2.** Ta có: $y' = \frac{-m-3}{(x-1)^2}$

Ta có $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = m + 5,\ y'(x_0) = -m - 3$. Phương trình tiếp tuyến Δ của (Cm) tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ là:

$y = (-m-3)(x-2) + m + 5 = (-m-3)x + 3m + 11$.

- $\Delta \cap Ox = A \Rightarrow A\left(\frac{3m+11}{m+3}; 0\right)$, với $m + 3 \neq 0$
- $\Delta \cap Oy = B \Rightarrow B(0; 3m+11)$

Suy ra diện tích tam giác OAB là: $S = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}\frac{(3m+11)^2}{|m+3|}$

Theo giả thiết bài toán ta suy ra: $\frac{1}{2}\frac{(3m+11)^2}{|m+3|} = \frac{25}{2}$

$$\Leftrightarrow (3m+11)^2 = 25|m+3| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9m^2 + 66m + 121 = 25m + 75 \\ 9m^2 + 66m + 121 = -25m - 75 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9m^2 + 41m + 46 = 0 \\ 9m^2 + 91m + 196 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2; m=-\frac{23}{9} \\ m=-7; m=-\frac{28}{9} \end{array}\right..$$

Bài 9. Giả sử tiếp tuyến của ba đồ thị $y = f(x), y = g(x), y = \frac{f(x)}{g(x)}$ tại điểm của hoành độ $x = 0$ bằng nhau. Khẳng định nào sau đây là đúng nhất.

A. $f(0) < \frac{1}{4}$ **B.** $f(0) \le \frac{1}{4}$ **C.** $f(0) > \frac{1}{4}$ **D.** $f(0) \ge \frac{1}{4}$

Theo giả thiết ta có: $f'(0)=g'(0)=\frac{f'(0).g(0)-g'(0)f(0)}{g^2(0)}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(0)=g'(0) \\ 1=\frac{g(0)-f(0)}{g^2(0)} \end{cases} \Rightarrow f(0)=g(0)-g^2(0)=\frac{1}{4}-\left(g(0)-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$$

Bài 10:

Câu 1. Tìm trên (C) : $y=2x^3-3x^2+1$ những điểm M sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 8.

A. $M(-1;-4)$ **B.** $M(-2;-27)$ **C.** $M(1;0)$ **D.** $M(2;5)$

✍***Bài làm* 1.** Giả sử $M(x_0;y_0)\in(C) \Rightarrow y_0=2x_0^3-3x_0^2+1$. Ta có: $y'=3x^2-6x$.

Phương trình tiếp tuyến Δ tại M: $y=(6x_0^2-6x_0)(x-x_0)+2x_0^3-3x_0^2+1$.

Δ đi qua $P(0;8) \Leftrightarrow 8=-4x_0^3+3x_0^2+1 \Leftrightarrow x_0=-1$. Vậy $M(-1;-4)$.

Câu 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+11x-1$ tại điểm có tung độ bằng 5.

A. $y=2x+1$; $y=-x+2$; $y=2x-1$

B. $y=2x+3$; $y=-x+7$; $y=2x-2$

C. $y=2x+1$; $y=-x+2$; $y=2x-2$

D. $y=2x+3$; $y=-x+7$; $y=2x-1$

✍***Bài làm* 2.** Ta có: $y=5 \Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6=0 \Leftrightarrow x=1;x=2;x=3$

Phương trình các tiếp tuyến: $y=2x+3$; $y=-x+7$; $y=2x-1$

Câu 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{4}{3}$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x+4y-1=0$.

A. $y=4x+\frac{7}{6}$; $y=4x-\frac{2}{3}$ **B.** $y=4x+\frac{73}{6}$; $y=4x-\frac{26}{3}$

C. $y=4x+\frac{73}{6}$; $y=4x-\frac{2}{3}$ **D.** $y=4x+\frac{7}{6}$; $y=4x-\frac{26}{3}$

✍***Bài làm* 3.** Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x+4y-1=0$

$\Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4} \Rightarrow$ Tiếp tuyến có hệ số góc $k=4$

$\Rightarrow y'=4 \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x=-3;x=2$

* $x=-3 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=4(x+3)+\frac{1}{6}=4x+\frac{73}{6}$

* $x=2 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=4(x-2)-\frac{2}{3}=4x-\frac{26}{3}$

Câu 4. Viết phương trình tiếp tuyến d của đồ thị (C): $y=\frac{2x+1}{x+1}$ biết d cách đều 2 điểm $A(2;4)$ và $B(-4;-2)$.

A. $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4},\ y=x+3,\ y=x+1$ **B.** $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{2},\ y=x+5,\ y=x+4$

C. $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4},\ y=x+4,\ y=x+1$ **D.** $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4},\ y=x+5,\ y=x+1$

✍***Bài làm* 4.** Gọi $M(x_0;y(x_0))$, $x_0\neq -1$ là tọa độ tiếp điểm của d và (C)

Khi đó d có hệ số góc $y'(x_0)=\frac{1}{(x_0+1)^2}$ và có phương trình là :

$$y=\frac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+2-\frac{1}{x_0+1}$$

Vì d cách đều $A,\ B$ nên d đi qua trung điểm $I(-1;1)$ của AB hoặc cùng phương với AB.

TH1: d đi qua trung điểm $I(-1;1)$, thì ta luôn có:

$1=\frac{1}{(x_0+1)^2}(-1-x_0)+2-\frac{1}{x_0+1}$, phương trình này có nghiệm $x_0=1$

Với $x_0=1$ ta có phương trình tiếp tuyến $d:\ y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$.

TH2: d cùng phương với AB, tức là d và AB có cùng hệ số góc, khi đó $y'(x_0)=k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=1$ hay

$\frac{1}{(x_0+1)^2}=1\Leftrightarrow x_0=-2$ hoặc $x_0=0$

Với $x_0=-2$ ta có phương trình tiếp tuyến $d:\ y=x+5$.

Với $x_0=0$ ta có phương trình tiếp tuyến $d:\ y=x+1$.

Vậy, có 3 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4},\ y=x+5,\ y=x+1$

Câu 5. Tìm $m\in\mathbb{R}$ để từ điểm $M(1;2)$ kẻ được 2 tiếp tuyến đến đồ thị $(C_m): y=x^3-2x^2+(m-1)x+2m$.

A. $m=\frac{10}{81}, m=-3$ **B.** $m=\frac{100}{81}, m=3$ **C.** $m=\frac{10}{81}, m=3$ **D.** $m=\frac{100}{81}, m=-3$

✍***Bài làm* 5.** Gọi $N(x_0;y_0)\in(C)$. Phương trình tiếp tuyến (d) của A tại N là:

$y=\left(3x_0^2-4x_0+m-1\right)\left(x-x_0\right)+x_0^3-2x_0^2+\left(m-1\right)x_0+2m$

$M\in\left(d\right)\Leftrightarrow 2x_0^3+5x_0^2-4x_0=3-3m\ \ (*)$

Dễ thấy $(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=3-3m$ và $f\left(x_0\right)=2x_0^3+5x_0^2-4x_0$.

Xét hàm số $f\left(x_0\right)=2x_0^3+5x_0^2-4x_0$ có $f'\left(x_0\right)=6x_0^2+10x_0-4$

$f'\left(x_0\right)=0\Leftrightarrow x_0=-2$ hoặc $x_0=\frac{1}{3}$.

Lập bảng biến thiên, suy ra $m=\frac{100}{81},m=-3$

Câu 6. Cho hàm số $y=\frac{\left(3m+1\right)x-m^2+m}{x+m}$ có đồ thị là $\left(C_m\right)$, $m\in\mathbb{R}$ và $m\neq 0$. Với giá trị nào của m thì tại giao điểm đồ thị với trục hoành, tiếp tuyến của đồ thị sẽ song song với đường thẳng $x-y-10=0$.

A. $m=-1;m=-\frac{1}{5}$ **B.** $m=1;m=-\frac{1}{5}$ **C.** $m=-1;m=\frac{1}{5}$ **D.** $m=1;m=\frac{1}{5}$

✍***Bài làm* 6.** Hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là nghiệm phương trình:

$$\frac{\left(3m+1\right)x-m^2+m}{x+m}=0,m\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -m,m\neq 0\\ \left(3m+1\right)x-m^2+m=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -m,m\neq 0,m\neq -\frac{1}{3}\\ x=\frac{m^2-m}{3m+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0,m\neq -\frac{1}{3}\\ x=\frac{m^2-m}{3m+1}\neq -m\end{cases}.\text{ Mà } y'=\frac{4m^2}{\left(x+m\right)^2}\Rightarrow y'\left(\frac{m^2-m}{3m+1}\right)=\frac{4m^2}{\left(\frac{m^2-m}{3m+1}+m\right)^2}.$$

Tiếp tuyến song song với đường thẳng $x-y-10=0$ nên $y'\left(\frac{m^2-m}{3m+1}\right)=1\Leftrightarrow m=-1$ hoặc $m=-\frac{1}{5}$

$*$ $m=-1$ giao điểm là $A\left(-1;0\right)$, tiếp tuyến là $y=x+1$.

$*$ $m=-\frac{1}{5}$ giao điểm là $B\left(\frac{3}{5};0\right)$, tiếp tuyến là $y=x-\frac{3}{5}$.

Câu 7. Tìm $m\in\mathbb{R}$ để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của $\left(C_m\right)$: $y=x^3-2x^2+\left(m-1\right)x+2m$ vuông góc với đường thẳng $y=-x$

A. $m=\frac{10}{3}$ **B.** $m=\frac{1}{3}$ **C.** $m=\frac{10}{13}$ **D.** $m=1$

***Bài làm* 7.** $y' = 3x^2 - 4x + m - 1 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + m - \frac{7}{3} \ge m - \frac{7}{3} \Rightarrow y' \ge m - \frac{7}{3} \Rightarrow y' = m - \frac{7}{3}$ khi $x = \frac{2}{3}$.Theo bài toán ta có: $y'(-1) = -1 \Leftrightarrow \left(m - \frac{7}{3}\right)(-1) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{10}{3}$.

Câu 8. Tìm m để đồ thị : $y = \frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (3m-4)x + 1$ có điểm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $x - y + 2013 = 0$.

A. $m \le 1$ **B.** $-\frac{1}{2} \le m$ **C.** $-\frac{1}{2} \le m \le 1$ **D.** $-\frac{1}{2} < m < 1$

***Bài làm* 8.** Để tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với đthẳng $x - y + 2012 = 0$ khi và chỉ khi $y'.1 = -1$ hay $mx^2 + (m+1)x + 3m - 3 = 0$ có nghiệm $\forall \in \mathbb{R}$. *Đáp số*: $-\frac{1}{2} \le m \le 1$.

Câu 9. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị là (C). Giả sử (d) là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = 2$, đồng thời (d) cắt đồ thị (C) tại N, tìm tọa độ N.

A. $N(1;-1)$ **B.** $N(2;3)$ **C.** $N(-4;-51)$ **D.** $N(3;19)$

***Bài làm* 9.** Tiếp tuyến (d) tại điểm M của đồ thị (C) có hoành độ $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 3$

Ta có $y'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow y'(x_0) = y'(2) = 9$

Phương trình tiếp tuyến (d) tại điểm M của đồ thị (C) là

$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Rightarrow y = 9(x-2) + 3 \Rightarrow y = 9x - 15$

Xét phương trình $x^3 - 3x + 1 = 9x - 15 \Leftrightarrow x^3 - 12x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x - 8) = 0$

$\Leftrightarrow x = -4$ hoặc $x = 2$ (không thỏa)

Vậy $N(-4;-51)$ là điểm cần tìm

Bài 11:

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 8x + 5$ có đồ thị là (C). Khẳng định nào sau đây đúng nhất ?

A. Không có bất kỳ hai tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số lại vuông góc với nhau

B. Luôn có bất kỳ hai tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số lại vuông góc với nhau

C. Hàm số đi qua điểm $M(1;17)$

D. Cả A, B, C đều sai

***Bài làm* 1.** Ta có $y'(x) = 3x^2 - 4x + 8$

Giả sử trái lại có hai tiếp tuyến với đồ thị (C) vuông góc với nhau.

Gọi x_1, x_2 tương ứng là các hoành độ của hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến đó.

Gọi k_1,k_2 lần lượt là các hệ số góc của hai tiếp tuyến tại các điểm trên (C) có hoành độ x_1,x_2 .

Khi đó $k_1,k_2=-1\Rightarrow y'(x_1).y'(x_2)=-1\Rightarrow\left(3x_1^2-4x_1+8\right)\left(3x_2^2-4x_2+8\right)=-1\quad(1)$

Tam thức $f(t)=3t^2-4t+8$ có $\Delta'<0$ nên $f(t)>0\forall t\in\mathbb{R}$ từ đó và từ (1) suy ra mâu thuẫn.

Vậy, giả thiết phản chứng là sai, suy ra (đpcm)

Câu 2. Cho hàm số $y=x^4+2x^2-3$. Tìm phương trình tiếp tuyến của hàm số có khoảng cách đến điểm $M(0;-3)$ bằng $\frac{5}{\sqrt{65}}$.

A. $y=2x+1$ **B.** $y=3x-2$ **C.** $y=7x+6$ **D.**Đáp án khác

***Bài làm* 2.** Gọi $A\in(C)\Rightarrow A\left(a;a^4+2a^2-3\right)$

Ta có: $y'=4x^3+4x\Rightarrow y'(a)=4a^3+4a$

Phương trình tiếp tuyến (t): $\left(4a^3+4a\right)x-y-3a^4-2a^2-3=0$

$$d(M;(t))=\frac{5}{\sqrt{65}} \text{ hay } \frac{3a^4+2a^2}{\sqrt{\left(4a^3+4a\right)^2+1}}=\frac{5}{\sqrt{65}} \text{ hay}$$

$$5(a-1)(a+1)\left(117a^6+193a^4+85a^2+5\right)=0$$

Giải tìm a, sau đó thế vào phương trình (t) suy ra các phương trình tiếp tuyến cần tìm.

Câu 3. Tìm m để đồ thị $y=x^3-3mx+2$ có tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d: x+y+7=0$ góc α sao cho $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{26}}$.

A. $m=2$ **B.** $m=3$ **C.** $m=1, m=4$ **D.** Đáp án khác

***Bài làm* 3.** Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến $\Rightarrow$ tiếp tuyến có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=(k;-1)$, d có vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}=(1;1)$

$$\text{Ta có } \cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{26}}=\frac{|k-1|}{\sqrt{2}\sqrt{k^2+1}}\Leftrightarrow k=\frac{3}{2} \text{ hoặc } k=\frac{2}{3}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ ít nhất một trong hai phương trình $y'=k_1$ hoặc $y'=k_2$ có nghiệm x tức

$$\left[\begin{array}{l}3x^2+2(1-2m)x+2-m=\frac{3}{2} \text{ có nghiệm}\\3x^2+2(1-2m)x+2-m=\frac{2}{3} \text{ có nghiệm}\end{array}\right.$$

. **Tìm điều kiện có nghiệm suy ra m. Bạn tự giải tiếp, hí hí.**

Câu 4. Xác định m để hai tiếp tuyến của đồ thị $y=-x^4+2mx^2-2m+1$ tại $A(1;0)$ và $B(-1;0)$ hợp với nhau một góc μ sao cho $\cos\mu=\frac{15}{17}$.

A. $m=0,\ m=2,\ m=\frac{5}{16},\ m=\frac{7}{6}$.
B. $m=0,\ m=2,\ m=\frac{15}{16},\ m=\frac{17}{16}$.
C. $m=0,\ m=2,\ m=\frac{15}{16},\ m=\frac{7}{16}$.
D. $m=0,\ m=2,\ m=\frac{5}{6},\ m=\frac{7}{6}$.

✍***Bài làm* 4.** Dễ thấy, A, B là 2 điểm thuộc đồ thị với $\forall m\in\mathbb{R}$.

Tiếp tuyến d_1 tại $A:(4m-4)x-y-4m+4=0$

Tiếp tuyến d_2 tại $B:(-4m+4)x-y-4m+4=0$

Đáp số: $m=0,\ m=2,\ m=\frac{15}{16},\ m=\frac{17}{16}$.

Bài 12. Cho hàm số: $y=\frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C).

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C).

Câu a. Tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1.

A. $y=-x-2,\ y=-x+7$.
B. $y=-x-5,\ y=-x+6$.
C. $y=-x-1,\ y=-x+4$.
D. $y=-x-1,\ y=-x+7$.

✍***Bài làm* a.** Hàm số đã cho xác định với $\forall x\neq 1$. Ta có: $y'=\frac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

$$y=\frac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0+2}{x_0-1} \text{ với } y'(x_0)=\frac{-4}{(x_0-1)^2} \text{ và } y_0=\frac{2x_0+2}{x_0-1}$$

Tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1

Nên có: $\frac{-4}{(x-1)^2}=-1\Leftrightarrow x_0=3,\ x_0=-1$

* Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=0\Rightarrow\Delta:y=-x-1$
* Với $x_0=2\Rightarrow y_0=4\Rightarrow\Delta:y=-x+7$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y=-x-1,\ y=-x+7$.

Câu b. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d:y=-4x+1$.

A. $y=-4x+3,\ \ y=-4x+4$.
B. $y=-4x+2,\ \ y=-4x+44$.
C. $y=-4x+2,\ \ y=-4x+1$.
D. $y=-4x+2,\ \ y=-4x+14$.

***Bài làm* b.** Hàm số đã cho xác định với $\forall x \neq 1$. Ta có: $y' = \frac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

$$y = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0+2}{x_0-1} \text{ với } y'(x_0) = \frac{-4}{(x_0-1)^2} \text{ và } y_0 = \frac{2x_0+2}{x_0-1}$$

Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -4x + 1$.

Nên có: $y'(x_0) = -4 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x_0-1)^2} = -4 \Leftrightarrow x_0 = 0$ hoặc $x_0 = 2$

* Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow \Delta: y = -4x + 2$
* Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 6 \Rightarrow \Delta: y = -4x + 14$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y = -4x + 2$, $y = -4x + 14$.

Câu c. Tiếp tuyến tạo với 2 trục tọa độ lập thành một tam giác cân.

A. $y = -x - 1$, $y = -x + 6$. **B.** $y = -x - 2$ $y = -x + 7$.

C. $y = -x - 1$, $y = -x + 5$. **D.** $y = -x - 1$, $y = -x + 7$.

***Bài làm* c.** Hàm số đã cho xác định với $\forall x \neq 1$. Ta có: $y' = \frac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

$$y = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0+2}{x_0-1} \text{ với } y'(x_0) = \frac{-4}{(x_0-1)^2} \text{ và } y_0 = \frac{2x_0+2}{x_0-1}$$

Tiếp tuyến tạo với 2 trục tọa độ lập thành một tam giác cân nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng ± 1. Mặt khác: $y'(x_0) < 0$, nên có: $y'(x_0) = -1$

Tức $\frac{-4}{(x_0-1)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = -1$ hoặc $x_0 = 3$.

* Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow \Delta: y = -x - 1$
* Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow \Delta: y = -x + 7$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y = -x - 1$, $y = -x + 7$.

Câu d. Tiếp tuyến tại điểm thuộc đồ thị có khoảng cách đến trục Oy bằng 2.

A. $y = -\frac{4}{9}x - \frac{1}{9}$, $y = 4x + 14$. **B.** $y = -\frac{4}{9}x - \frac{2}{9}$, $y = 4x + 1$.

C. $y = -\frac{4}{9}x - \frac{1}{9}$, $y = 4x + 1$. **D.** $y = -\frac{4}{9}x - \frac{2}{9}$, $y = 4x + 14$.

✍***Bài làm* d.** Hàm số đã cho xác định với $\forall x \neq 1$. Ta có: $y' = \dfrac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

$$y = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0+2}{x_0-1} \text{ với } y'(x_0)=\frac{-4}{(x_0-1)^2} \text{ và } y_0=\frac{2x_0+2}{x_0-1}$$

Khoảng cách từ $M(x_0;y_0)$ đến trục Oy bằng 2 suy ra $x_0 = \pm 2$, hay $M\left(-2;\frac{2}{3}\right)$, $M(2;6)$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M\left(-2;\frac{2}{3}\right)$ là: $y=-\frac{4}{9}x-\frac{2}{9}$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(2;6)$ là: $y=4x+14$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài: $y=-\frac{4}{9}x-\frac{2}{9}$, $y=4x+14$.

Bài 13. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số: $y=\dfrac{2x}{x-1}$, biết:

Câu a. Hệ số góc của tiếp tuyến bằng -2

A. $y=-2x+1, y=-2x$ **B.** $y=-2x+2, y=-2x+4$

C. $y=-2x+9, y=-2x$ **D.** $y=-2x+8, y=-2x$

✍***Bài làm* a.** Ta có: $y'=\dfrac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2}=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$. Gọi $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, hệ số góc tiếp tuyến tại $(x_0;y_0)$ bằng $y'(x_0)=\dfrac{-2}{(x_0-1)^2}$

Theo giải thiết, ta có: $y'(x_0)=-2 \Leftrightarrow \dfrac{-2}{(x_0-1)^2}=-2$

$$\Leftrightarrow (x_0-1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0-1=1 \\ x_0-1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=2 \Rightarrow y_0=4 \\ x_0=0 \Rightarrow y_0=0 \end{array}\right.$$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài: $y=-2x+8, y=-2x$

Câu b. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): x+2y=0$

A. $y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}, y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}$ **B.** $y=-\frac{1}{2}x+\frac{27}{4}, y=-\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}$

C. $y=-\frac{1}{2}x+\frac{2}{4}, y=-\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}$ **D.** $y=-\frac{1}{2}x+\frac{27}{4}, y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}$

✍***Bài làm* b.** Ta có: $y'=\dfrac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2}=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$. Gọi $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, hệ số góc

tiếp tuyến tại $(x_0;y_0)$ bằng $y'(x_0)=\dfrac{-2}{(x_0-1)^2}$

Theo giải thiết, ta có: $\dfrac{-2}{(x_0-1)^2}=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow (x_0-1)^2=\dfrac{1}{4}$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài: $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{27}{4}, y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{7}{4}$

Câu c. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(\Delta):9x-2y+1=0$

A. $y=-\dfrac{2}{9}x+\dfrac{2}{9}, y=-\dfrac{2}{9}x+\dfrac{8}{9}$ **B.** $y=-\dfrac{2}{9}x+\dfrac{32}{9}, y=-\dfrac{2}{9}x+\dfrac{8}{9}$

C. $y=-\dfrac{2}{9}x+\dfrac{1}{9}, y=-\dfrac{2}{9}x+\dfrac{8}{9}$ **D.** $y=-\dfrac{2}{9}x+\dfrac{32}{9}, y=-\dfrac{2}{9}x-\dfrac{4}{9}$

✍***Bài làm* c.** Ta có: $y'=\dfrac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2}=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$. Gọi $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, hệ số góc

tiếp tuyến tại $(x_0;y_0)$ bằng $y'(x_0)=\dfrac{-2}{(x_0-1)^2}$

Theo giải thiết, ta có: $\dfrac{-2}{(x_0-1)^2}=-\dfrac{2}{9}\Leftrightarrow (x_0-1)^2=\dfrac{1}{9}$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài: $y=-\dfrac{2}{9}x+\dfrac{32}{9}, y=-\dfrac{2}{9}x+\dfrac{8}{9}$

Câu d. Tạo với đường thẳng $(d'):4x+3y+2012=0$ góc 45^0

A. $y=2x+3$ **B.** $y=\dfrac{1}{4}x+3$ **C.** $y=\dfrac{2}{3}x+3$ **D.** Đáp án khác

✍***Bài làm* d.** Ta có: $y'=\dfrac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2}=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$. Gọi $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, hệ số góc

tiếp tuyến tại $(x_0;y_0)$ bằng $y'(x_0)=\dfrac{-2}{(x_0-1)^2}$

Tiếp tuyến cần tìm có phương trình: $y=k(x-x_0)+y(x_0)$ với $k=y'(x_0)<0$, có

vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(k;-1)$, (d') có vectơ pháp tuyến là $\vec{m}=(4;3)$

$\cos 45^0 = \dfrac{\left|\vec{n}.\vec{m}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{m}\right|} \Leftrightarrow \dfrac{\left|4k-3\right|}{\sqrt{k^2+1.5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow k = -\dfrac{1}{7}$ thỏa đề bài.

Câu e. Tạo với chiều dương của trục hoành một góc α sao cho $\cos\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

A. $y = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{3}{4}$ **B.** $y = \dfrac{1}{5}x - \dfrac{3}{4}$ **C.** $y = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{13}{4}$ **D.** Đáp án khác

✍***Bài làm* e.** Ta có: $y' = \dfrac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$. Gọi $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, hệ số góc tiếp tuyến tại $(x_0;y_0)$ bằng $y'(x_0) = \dfrac{-2}{(x_0-1)^2}$

Tiếp tuyến tạo với chiều dương trục hoành ,khi đó tồn tại $\alpha \in [0;\pi]$ để $\tan\alpha < 0$ và $\tan\alpha = \dfrac{-2}{(x_0-1)^2}$. Ta có: $\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \tan\alpha = -\dfrac{1}{2}$, nên có:

$\dfrac{-2}{(x_0-1)^2} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 4$

Câu f. Tại điểm M thuộc đồ thị và vuông góc với IM (I là giao điểm 2 tiệm cận)

A. $y = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{3}{4}$ **B.** $y = \dfrac{1}{5}x - \dfrac{3}{4}$ **C.** $y = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{13}{4}$ **D.** Đáp án khác

✍***Bài làm* f.** Ta có: $y' = \dfrac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$.Gọi $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, hệ số góc tiếp tuyến tại $(x_0;y_0)$ bằng $y'(x_0) = \dfrac{-2}{(x_0-1)^2}$

$k_{IM} = \dfrac{2}{(x_0-1)^2}$, theo bài toán nên có: $k_{IM}.y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 4$

Bài 14: Cho hàm số $y = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2} + 2$ có đồ thị (C).

Câu 1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng : $y = 2x - 2$.

A. $y = 2x + \dfrac{3}{4}$ **B.** $y = 2x + \dfrac{1}{4}$ **C.** $y = 2x - \dfrac{3}{4}$ **D.** $y = 2x + 1$

✍***Bài làm* 1.** $y'(x_0) = 2$ (trong đó x_0 là hoành độ tiếp điểm của (t) với (C)).

$\Leftrightarrow x_0^3 + x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0^3 + x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1.$

Phương trình (t): $y = y'(1)(x-1) + y(1) = 2(x-1) + \frac{11}{4} = 2x + \frac{3}{4}$

Câu 2. Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (C) biết khoảng cách từ điểm A(0;3) đến (d) bằng $\frac{9}{4\sqrt{5}}$.

A. $y = 2x + \frac{1}{4}, y = -2x + \frac{3}{4}$ **B.** $y = 2x + \frac{3}{4}, y = -2x + \frac{3}{14}$

C. $y = 2x + \frac{3}{4}, y = -2x + \frac{3}{4}$ **D.** $y = 2x + \frac{3}{14}, y = -2x + \frac{3}{4}$

***Bài làm* 2.** Phương trình tiếp tuyến (d) có dạng : $y = y'(x_0)(x - x_0 + +y(x_0)$

(trong đó x_0 là hoành độ tiếp điểm của (d) với (C)).

Phương trình (d): $y = (x_0^3 + x_0)(x - x_0) + \frac{x_0^4}{4} + \frac{x_0^2}{2} + 2 = (x_0^3 + x_0)x - \frac{3}{4}x_0^4 - \frac{1}{2}x_0^2 + 2$

$\Leftrightarrow (x_0^3 + x_0)x - y - \frac{3}{4}x_0^4 - \frac{1}{2}x_0^2 + 2 = 0.$

$$d(A;(d)) = \frac{9}{4\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{\left|-\frac{3}{4}x_0^4 - \frac{1}{2}x_0^2 - 1\right|}{\sqrt{(x_0^3 + x_0)^2 + 1}} = \frac{9}{4\sqrt{5}}$$

$\Leftrightarrow \left|3x_0^4 + 2x_0^2 + 4\right|\sqrt{5} = 9\sqrt{x_0^2(x_0^2+1)^2 + 1} \Leftrightarrow 5(3x_0^4 + 2x_0^2 + 4)^2 = 81[x_0^2(x_0^2+1)^2 + 1]$

Đặt $t = x_0^2$, $t \geq 0$. Phương trình (1) trở thành: $5(3t^2 + 2t + 4)^2 = 81[t(t+1)^2 + 1]$

$\Leftrightarrow 5(9t^4 + 4t^2 + 16 + 12t^3 + 24t^2 + 16t) = 81t^3 + 162t^2 + 81t + 81$

$\Leftrightarrow 45t^4 - 21t^3 - 22t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(45t^3 + 24t^2 + 2t + 1) = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$ (do $t \geq 0$ nên $45t^3 + 24t^2 + 2t + 1 > 0$)

Với $t = 1$,ta có $x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến (d): $y = 2x + \frac{3}{4}, y = -2x + \frac{3}{4}$

Bài 15:

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x-2}$, có đồ thị là (C). Tìm a, b biết tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) và trục Ox có phương trình là $y = -\frac{1}{2}x + 2$

A. $a = -1, b = 1$ **B.** $a = -1, b = 2$ **C.** $a = -1, b = 3$ **D.** $a = -1, b = 4$

Bài làm 1. Giao điểm của tiếp tuyến $d:\ y=-\frac{1}{2}x+2$ với trục Ox là $A(4;0)$, hệ số góc của $d\ :\ k=-\frac{1}{2}$ và $A(4;0),\in(C)\Leftrightarrow\frac{4a+b}{2}=0\Leftrightarrow 4a+b=0$.

Ta có: $y'=\frac{-2a-b}{(x-2)^2}\Rightarrow y(4)=\frac{-2a-b}{4}$

Theo bài toán thì: $k=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow y'(4)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{-2a-b}{4}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2a+b=2$

Giải hệ $\begin{cases}4a+b=0\\2a+b=2\end{cases}$ ta được $a=-1,\ b=4$

Câu 2. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$, có đồ thị là (C). Tìm a,b,c biết (C) có ba điểm cực trị , điểm cực tiểu của (C) có tọa độ là $(0;3)$ và tiếp tuyến d của (C) tại giao điểm của (C) với trục Ox có phương trình là $y=-8\sqrt{3}x+24$.

A. $a=-1,\ b=2,\ c=3$ **B.** $a=1,\ b=21,\ c=3$

C. $a=-1,\ b=21,\ c=13$ **D.** $a=-12,\ b=22,\ c=3$

Bài làm 2. (C) có ba điểm cực trị , điểm cực tiểu của (C) có tọa độ là $(0;3)$ $\Leftrightarrow\begin{cases}a<0,b>0\\c=3\end{cases}$

Giao điểm của tiếp tuyến d và trục Ox là $B\left(\sqrt{3};0\right)$ và hệ số góc của d là $-8\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}B\in(C)\\y'\left(\sqrt{3}\right)=-8\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9a+3b+c=0\\4a\left(\sqrt{3}\right)^3+2b\sqrt{3}=-8\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9a+3b+c=0\\6a+b=-4\end{cases}.$$

Giải hệ $\begin{cases}c=3\\9a+3b+c=0\\6a+b=-4\end{cases}$ ta được $a=-1,\ b=2,\ c=3\Rightarrow y=-x^4+2x^2+3$

Bài 16: Cho hàm số $y=2x^4-4x^2-1$ có đồ thị là (C).

Câu 1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x-48y+1=0$.

A. $\Delta:y=-48x-81$ **B.** $\Delta:y=-48x+81$ **C.** $\Delta:y=-48x-1$ **D.** $\Delta:y=-48x-8$

Bài làm 1. Ta có $y'=8x^3-8x$

Gọi $M(x_0;y_0)$. Tiếp tuyến Δ tại M có phương trình:

$y=(8x_0^3-8x_0)(x-x_0)+2x_0^4-4x_0^2-1$.Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x-48y+1=0$

Nên ta có: $y'(x_0).\frac{1}{48}=-1\Leftrightarrow y'(x_0)=-48$

$x_0^3-x_0+6=0\Leftrightarrow x_0=-2\Rightarrow y_0=15$.

Phương trình $\Delta:y=-48(x+2)+15=-48x-81$.

Câu 2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua $A(1;-3)$.

A. $\Delta: y=-3$ hay $\Delta: y=-\frac{64}{27}x-\frac{1}{81}$
B. $\Delta: y=-3$ hay $\Delta: y=-\frac{64}{27}x-\frac{1}{8}$
C. $\Delta: y=-3$ hay $\Delta: y=-\frac{64}{27}x-\frac{51}{2}$
D. $\Delta: y=-3$ hay $\Delta: y=-\frac{64}{27}x-\frac{51}{81}$

***Bài làm* 2.** Ta có $y'=8x^3-8x$

Gọi $M(x_0;y_0)$. Tiếp tuyến Δ tại M có phương trình:

$y=(8x_0^3-8x_0)(x-x_0)+2x_0^4-4x_0^2-1$. Vì tiếp tuyến Δ đi qua $A(1;-3)$ nên ta có

$-3=(8x_0^3-8x_0)(1-x_0)+2x_0^4-4x_0^2-1$

$\Leftrightarrow 3x_0^4-4x_0^3-2x_0^2+4x_0-1=0 \Leftrightarrow (x_0-1)^2(x_0+1)(3x_0-1)=0$

- $x_0=\pm1 \Rightarrow \Delta: y=-3$
- $x_0=\frac{1}{3} \Rightarrow \Delta: y=-\frac{64}{27}x-\frac{51}{81}$.

Câu 3. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tiếp xúc với (C) tại hai điểm phân biệt.

A. $\Delta: y=-3$ **B.** $\Delta: y=4$ **C.** $\Delta: y=3$ **D.** $\Delta: y=-4$

***Bài làm* 3**. Ta có $y'=8x^3-8x$

Gọi $M(x_0;y_0)$. Tiếp tuyến Δ tại M có phương trình:

$y=(8x_0^3-8x_0)(x-x_0)+2x_0^4-4x_0^2-1$. Giả sử Δ tiếp xúc với (C) tại điểm thứ hai $N(n;2n^4-4n^2-1)$

Suy ra: $\Delta: y=(8n^3-8n)(x-n)+2n^4-4n^2-1$

Nên ta có: $\begin{cases}8x_0^3-8x_0=8n^3-8n\\ -6x_0^4+4x_0^2-1=-6n^4+4n^2-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0^2+nx_0+n^2-1=0\\ (x_0+n)(3x_0^2+3n^2-2)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_0^2+x_0n+n^2-1=0\\ x_0+n=0\end{cases}$ (I) hoặc $\Leftrightarrow \begin{cases}x_0^2+x_0n+n^2-1=0\\ 3x_0^2+3n^2-2=0\end{cases}$ (II)

Ta có (I) $\Leftrightarrow \begin{cases}x_0=-n\\ n=\pm1\end{cases}$; (II) $\Leftrightarrow \begin{cases}x_0^2+n^2=\frac{2}{3}\\ x_0n=\frac{1}{3}\end{cases}$ vô nghiệm. Vậy $\Delta: y=-3$.

Bài 17: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\frac{x^3}{3}-x^2+2x+1$.

Câu 1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

A. $y=2x+1$ **B.** $y=22x+1$ **C.** $y=2x+3$ **D.** $y=2x+4$

Câu 2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{x}{5}+2$.

A. $y = 5x + \frac{2}{3}$ hoặc $y = 5x - 8$

B. $y = 5x + \frac{8}{3}$ hoặc $y = 5x - 9$

C. $y = 5x + \frac{8}{3}$ hoặc $y = 5x - 5$

D. $y = 5x + \frac{8}{3}$ hoặc $y = 5x - 8$

✍***Bài làm* 2.** ***Cách 1.*** Tiếp tuyến (d) của (C) vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{x}{5}+2$,suy ra phương trình (d) có dạng : $y = 5x + m$.

(d) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^3}{3}-x^2+2x+1=5x+m \ \ (1) \\ x^2-2x+2=5 \ \ (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Giải hệ trên, (2) $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$.

Thay $x = -1$ vào (1) ta được $m = \frac{8}{3}$.

Thay $x = 3$ vào (1) ta được $m = -8$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 5x + \frac{8}{3}$ hoặc $y = 5x - 8$.

Cách 2. Tiếp tuyến (d) vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{x}{5}+2$ suy ra hệ số góc của (d) : k = 5.

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của (d) với (C) ,ta có : $k=f'(x_0)\Leftrightarrow 5=x_0^2-2x_0+2\Leftrightarrow x_0=-1, x_0=3$.

Suy ra phương trình (d): $\left[\begin{array}{l} y=5(x+1)+f(1)=5x+\frac{8}{3} \\ y=5(x+3)+f(3)=5x-8 \end{array}\right.$.

Câu 3.Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành , trục tung lần lượt tại A, B sao cho tam giác OAB vuông cân (O là gốc tọa độ).

A. $y=x+\frac{1}{3}$. **B.** $y=x+\frac{4}{3}$. **C.** $y=x+\frac{4}{13}$. **D.** $y=x-\frac{4}{3}$.

✍***Bài làm* 3.** Vì tam giác OAB là tam giác vuông tại O nên nó chỉ có thể vuông cân tại O , khi đó góc giữa tiếp tuyến (D) và trục Ox là 45^0 ,suy ra hệ số góc của (D) là

$k_D = \pm 1$

Trường hợp $k_D = 1$,khi đó phương trình (D) : $y = x + a$. $(a \neq 0)$

(D) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^3}{3}-x^2+2x+1=x+a \ \ (3) \\ x^2-2x+2=1 \ \ (4) \end{cases}$ có nghiệm.

(4) $\Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Thay x = 1 vaò phương trình (3) ta được a = $\frac{4}{3}$.

Vậy trong trường hợp này ,phương trình (D): y = $x+\frac{4}{3}$

Trường hợp $k_D=-1$, khi đó phương trình (D): y = - x + a .

(D) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^3}{3}-x^2+2x+1=-x+a \quad (5) \\ x^2-2x+2=-1 \quad (6) \end{cases}$ có nghiệm

(6) $\Leftrightarrow x^2-2x+3=0$ .P/t này vô nghiệm nên hệ (5), (6) vô nghiệm ,suy ra (D) : y = - x + a không tiếp xúc với (C).

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là y = x + $\frac{4}{3}$.

Bài 18: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(m-1)x+2m$ có đồ thị là (C_m).

Câu 1. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại điểm có hoành độ $x=1$ song song với đường thẳng $y=3x+10$.

A. $m=2$ **B.** $m=4$ **C.** $m=0$ **D.**Không tồn tại m

***Bài làm* 1**. Ta có: $y'=3x^2-4x+m-1$. Tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ $x=1$ có phương trình $y=(m-2)(x-1)+3m-2=(m-2)x+2m$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m-2=3 \\ 2m\neq 10 \end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy không tồn tại m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 2. Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với đường thẳng $\Delta: y=2x+1$.

A. $m=1$ **B.** $m=2$ **C.** $m=\frac{11}{6}$ **D.** $m=\frac{6}{11}$

***Bài làm* 2**. Ta có: $y'=3x^2-4x+m-1$.Ta có:

$y'=3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)+m-\frac{7}{3}=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+m-\frac{7}{3}\Rightarrow y'\geq m-\frac{7}{3}$.

Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=\frac{2}{3}$ có hệ số góc nhỏ nhất và hệ số góc có giá trị : $k=m-\frac{7}{3}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow k.2=-1\Leftrightarrow\left(m-\frac{7}{3}\right).2=-1\Leftrightarrow m=\frac{11}{6}$.

Câu 3. Tìm m để từ điểm M(1;2) vẽ đến (C_m) đúng hai tiếp tuyến.

A. $\left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=\frac{10}{81} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=\frac{100}{81} \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=\frac{10}{81} \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=\frac{100}{81} \end{array}\right.$

***Bài làm* 3.** Ta có: $y'=3x^2-4x+m-1$. Gọi $A(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến Δ tại A:

$y=\left(3x_0^2-4x_0+m-1\right)(x-x_0)+x_0^3-2x_0^2+(m-1)x_0+2m$

$M\in\Delta \Leftrightarrow 2=\left(3x_0^2-4x_0+m-1\right)(1-x_0)+x_0^3-2x_0^2+(m-1)x_0+2m \Leftrightarrow 2x_0^3+5x_0^2-4x_0+3m-3=0$ (*)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có đúng hai nghiệm phân biệt (1)

Xét hàm số: $h(t)=2t^3+5t^2-4t,\ t\in\mathbb{R}$

Ta có: $h'(t)=6t^2+10t-4 \Rightarrow h'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3}, t=-2$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	12	↘	$-\frac{19}{27}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-3m=12 \\ 3-3m=-\frac{19}{27} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=\frac{100}{81} \end{array}\right.$ là những giá trị cần tìm.

Bài 19: Tìm m để đồ thị :

Câu 1. $y=\frac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2+(4-3m)x+1$ tồn tại đúng 2 điểm có hoành độ dương mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $x+2y-3=0$.

A. $m\in\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$ **B.** $m\in\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{7}{3}\right)$

C. $m\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{8}{3}\right)$ **D.** $m\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$

***Bài làm* 1.** Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=mx^2+2(m-1)x+4-3m$.

Từ yêu cầu bái toán dẫn đến phương trình $y\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ có đúng 2 nghiệm dương phân biệt, tức

$mx^2+2(m-1)x+2-3m=0$ có đúng 2 dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta'>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq \frac{1}{2} \\ 0<m<1 \\ 0<m<\frac{2}{3} \end{cases}$ hay

$m\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$.

Câu 2. $y=\frac{x^2+2mx+2m^2-1}{x-1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến với (C_m) tại hai điểm này vuông góc với nhau.

A. $m=\frac{2}{3}$ **B.** $m=-1$ **C.** $m=\frac{2}{3}, m=-1$ **D.** $m=0$

✍***Bài làm*** **2**. Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành:

$\frac{x^2+2mx+2m^2-1}{x-1}=0\Leftrightarrow x^2+2mx+2m^2-1=0,\ (x\neq 1)\ (1)$

Để (C_m) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A,B thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1. Tức là ta phải có: $\begin{cases}\Delta'=m^2-2m^2+1>0\\ 1+2m+2m^2-1\neq 0\end{cases}$ hay $\begin{cases}(1-m)(1+m)>0\\ 2m(m+1)\neq 0\end{cases}$ tức $\begin{cases}-1<m<1\\ m\neq 0\end{cases}$ (2).

Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của (1). Theo định lý Vi – ét, ta có: $x_1+x_2=-2m,\ x_1.x_2=2m^2-1$

Giả sử $I(x_0;0)$ là giao điểm của (C_m) và trục hoành. Tiếp tuyến của (C_m) tại điểm I có hệ số góc

$$y'(x_0)=\frac{(2x_0+2m)(x_0-1)-(x_0^2+2mx_0+2m^2-1)}{(x_0-1)^2}=\frac{2x_0+2m}{x_0-1}$$

Như vậy, tiếp tuyến tại A,B lần lượt có hệ số góc là $y'(x_1)=\frac{2x_1+2m}{x_1-1}$, $y'(x_2)=\frac{2x_2+2m}{x_2-1}$.

Tiếp tuyến tại A,B vuông góc nhau khi và chỉ khi $y'(x_1)y'(x_2)=-1$ hay

$\left(\frac{2x_1+2m}{x_1-1}\right)\left(\frac{2x_2+2m}{x_2-1}\right)=-1\Leftrightarrow 5x_1.x_2+(4m-1)(x_1+x_2)+4m^2+1=0$ tức $3m^2+m-2=0\ \Leftrightarrow m=-1$ hoặc $m=\frac{2}{3}$. Đối chiếu điều kiện chỉ có $m=\frac{2}{3}$ thỏa mãn.

Bài 20: Tìm điểm M trên đồ thị (C): $y=\frac{2x+1}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ: $x+3y-3=0$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(-2;1)$ **B.** $M(2;5)$ **C.** $M\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ **D.** $M\left(3;\frac{7}{2}\right)$

✍***Bài làm***: Gọi $M\left(m;\frac{2m+1}{m-1}\right)$ là tọa độ điểm cần tìm $(m\neq 1)$.

Khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ là: $d=\frac{\left|m+3\left(\frac{2m+1}{m-1}\right)-3\right|}{\sqrt{1^2+3^2}}$ hay $d=\frac{1}{\sqrt{10}}.\frac{m^2+2m+6}{|m-1|}$

Xét hàm số: $f(m)=\frac{m^2+2m+6}{|m-1|}=\begin{cases}\frac{m^2+2m+6}{-(m-1)} & \text{khi } m<1\\ \frac{m^2+2m+6}{m-1} & \text{khi } m>1\end{cases}$

Ta có: $f'(m)=0\Leftrightarrow m=-2$ thỏa $m<1$ hoặc $m=4$ thỏa $m>1$.

Lập bảng biến thiên suy ra $\min d=\frac{2}{\sqrt{10}}$ khi $m=-2$ tức $M(-2;1)$.

Tiếp tuyến tại M là $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$, tiếp tuyến này song song với Δ .

NGUYỄN BẢO VƯƠNG

CHƯƠNG V. ĐẠO HÀM.

TẬP 2B. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN KHI BIẾT HỆ SỐ GÓC

MỤC LỤC

Vấn đề 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số khi biết hệ số góc của tiếp tuyến.

Phương pháp:

- Giải phương trình $f'(x)=k$ giải phương trình này ta tìm được các nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n$.
- Phương trình tiếp tuyến: $y=f'(x_i)(x-x_i)+f(x_i)$ $(i=1,2,...,n)$.

Chú ý: Đối với bài toán này ta cần lưu ý một số vấn đề sau:

- Số tiếp tuyến của đồ thị chính là số nghiệm của phương trình :

$$f'(x)=k.$$

- Cho hai đường thẳng $d_1: y=k_1x+b_1$ và $d_2: y=k_2x+b_2$. Khi đó

i) $\tan\alpha=\left|\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1.k_2}\right|$, trong đó $\alpha=(d_1,d_2)$.

ii) $d_1//d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1=k_2 \\ b_1\neq b_2 \end{cases}$

iii) $d_1\perp d_2 \Leftrightarrow k_1.k_2=-1$.

Nếu đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B thì $\tan OAB=\pm\dfrac{OB}{OA}$, trong đó hệ số góc của d được xác định bởi $y'(x)=\tan OAB$

Ví dụ 1 : Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C)

1. Giải bất phương trình $y'<-4$;

2. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến này cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B mà $OA=4OB$.

Lời giải.

1. Ta có $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$.

Bất phương trình $y'<-4 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{(x-1)^2}<-4 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2<\dfrac{1}{4} \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1|<\dfrac{1}{2} \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2} \\ x\neq 1 \end{cases}$

2. Cách 1:

Ta có $\tan OAB=\dfrac{OB}{OA}=\dfrac{1}{4}$ nên hệ số góc của tiếp tuyến $k=\dfrac{1}{4}$ hoặc $k=-\dfrac{1}{4}$.

Nhưng do $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0, \forall x\neq 1$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k=-\dfrac{1}{4}$.

Hoành độ tiếp điểm nghiệm phương trình $\dfrac{-1}{(x-1)^2}=\dfrac{-1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Từ đó ta xác định được hai tiếp tuyến thỏa mãn: $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}; y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}$

Cách 2:

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-1}{x_0-1}\right)$ $(x_0\neq 1)$ là:

$y=\dfrac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0-1}{x_0-1}$ hay $y=\dfrac{-x}{(x_0-1)^2}+\dfrac{2x_0^2-2x_0+1}{(x_0-1)^2}$

Ta xác định được tọa độ giao điểm của tiếp tuyến với các trục tọa độ:

$A(2x_0^2-2x_0+1;0), B\left(0;\dfrac{2x_0^2-2x_0+1}{(x_0-1)^2}\right)$

Từ giả thiết $OA=4OB$, ta có: $\left|2x_0^2-2x_0+1\right|=4\left|\dfrac{2x_0^2-2x_0+1}{(x_0-1)^2}\right|\Leftrightarrow(x_0-1)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=3\\x_0=-1\end{array}\right.$

Cách 3: Giả sử $A(a;0),B(0;b)$ với $ab\neq 0$.

Với giả thiết $OA=4OB\Rightarrow|a|=4|b|\Leftrightarrow a=\pm 4b\Leftrightarrow\dfrac{b}{a}=\pm\dfrac{1}{4}$

Đường thẳng đi qua hai điểm *A, B* có dạng $\Delta:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ hay $\Delta: y=-\dfrac{b}{a}x+b$

Đường $\Delta: y=-\dfrac{b}{a}x+b$ tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm x_0:

$\begin{cases}\dfrac{-1}{(x_0-1)^2}=-\dfrac{b}{a} & (*)\\ \dfrac{2x_0-1}{x_0-1}=-\dfrac{b}{a}x_0+b & (**)\end{cases}$ (I). Từ (*) suy ra $-\dfrac{b}{a}<0\Rightarrow\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{4}$.

Hệ (I) trở thành $\begin{cases}\dfrac{-1}{(x_0-1)^2}=-\dfrac{1}{4}\\ \dfrac{2x_0-1}{x_0-1}=-\dfrac{1}{4}x+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_0=3\\x_0=-1\end{array}\right.\\ b=\dfrac{2x_0-1}{x_0-1}+\dfrac{1}{4}x_0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=\dfrac{13}{4}\\ b=\dfrac{5}{4}\end{array}\right.$

Do vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn: $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4};y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}$

Ví dụ 2 Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+m}{x+m}$, m là tham số khác 0 và khác $-\dfrac{1}{3}$

1.Chứng minh rằng nếu (C) cắt Ox tại điểm M có hoành độ x_0 thì hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại M là : $k=\dfrac{2x_0-2m}{x_0+m}$

2.Tìm m để (C) cắt Ox tại hai điểm và hai tiếp tuyến của (C) tại hai điêm đó vuông góc với nhau.

Lời giải.

1. Ta có $y=x-3m+\dfrac{3m^2+m}{x+m}$

Khi m $\neq 0$ và m $\neq -\dfrac{1}{3}$ thì đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu do đó đồ thị hàm số không suy biến thành đường thẳng.

Hệ số góc của tiếp tuyến (d) của (C) tại M là

$$k=y'(x_0)=\frac{(2x_0-2m)(x_0+m)-(x_0^2-2mx_0+m)}{(x_0+m)^2}.$$

Vì M thuộc Ox nên $y(x_0)=\frac{x_0^2-2mx_0+m}{x_0+m}=0\Rightarrow x_0^2-2mx_0+m=0$.

$$\Rightarrow k=\frac{(2x_0-2m)(x_0+m)}{(x_0+m)^2}=\frac{2x_0-2m}{x_0+m}\text{ (đpcm).}$$

2.Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox

$$\frac{x^2-2mx+m}{x+m}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -m\\ g(x)=x^2-2mx+m=0\ \ (1)\end{cases}$$

(C) cắt Ox tại hai điểm phân biệt M,N $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm x_1, x_2 khác – m .

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2-m>0\\ g(-m)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\vee m>1\\ 3m^2+m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\vee m>1\\ m\neq -\dfrac{1}{3}\end{cases}.(*)$$

Khi đó hệ số góc của hai tiếp tuyến của (C) tại M, N là

$$k_1=\frac{2x_1-2m}{x_1+m}\ ,\ k_2=\frac{2x_2-2m}{x_2+m}.$$

Hai tiếp tuyến này vuông góc $\Leftrightarrow k_1.k_2=-1$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2x_1-2m}{x_1+m}\right)\left(\frac{2x_2-2m}{x_2+m}\right)=-1$$

$$\Leftrightarrow 4[x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2]=-x_1x_2-m(x_1+x_2)-m^2\ \ (2)$$

Lại có $x_1+x_2=2m$, $x_1.x_2=m$ Do đó : (2) $\Leftrightarrow -m^2+5m=0\Leftrightarrow m=0\vee m=5$.

So với điều kiện (*) nhận m = 5.

Ví dụ 3 : Cho hàm số $y=\frac{x}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm tọa độ điểm M thuộc (C), biết rằng tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng đi qua điểm M và điểm $I(1;1)$.

Lời giải.

Với $x_0\neq 1$, tiếp tuyến (d) với (C) tại $M\left(x_0;\frac{x_0}{x_0-1}\right)$ có phương trình :

$$y=-\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0}{x_0-1}\Leftrightarrow\frac{1}{(x_0-1)^2}x+y-\frac{x_0^2}{(x_0-1)^2}=0$$

(d) có vec tơ chỉ phương $\vec{u}=\left(-1;\frac{1}{(x_0-1)^2}\right)$, $\overrightarrow{IM}=\left(x_0-1;\frac{1}{x_0-1}\right)$

Để (d) vuông góc IM điều kiện là :

$$\vec{u}.\overrightarrow{IM}=0\Leftrightarrow -1.(x_0-1)+\frac{1}{(x_0-1)^2}\frac{1}{x_0-1}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\ x_0=2\end{array}\right.$$

Với $x_0 = 0$, ta được $M(0;0)$

Với $x_0 = 2$, ta được $M(2;2)$

Vậy, $M(0;0)$ và $M(2;2)$ là tọa độ cần tìm.

Ví dụ 4 : Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ có đồ thị là (C). Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị (C), hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x - 9$.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C) \Leftrightarrow y_0 = x_0^3 + 3x_0^2 - 9x_0 + 5$.

Tiếp tuyến tại điểm M có hệ số góc: $k = y'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 - 9 = 3(x_0 + 1)^2 - 12 \geq -12$

$\min k = -12$, đạt được khi: $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 16$.

Vậy trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị hàm số, tiếp tuyến tại M $(-1;16)$. có hệ số góc nhỏ nhất và có phương trình là: $y = -12x + 4$

Ví dụ 5. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 - 5$.

1. Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại điểm A thuộc (C) có hoành độ $x = 3$. Tìm giao điểm khác A của (d) và (C).

2. Xác định tham số a để tồn tại ít nhất một tiếp tuyến của (C) có hệ số góc là a.

3. Chứng minh rằng chỉ có duy nhất một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm có hoành độ thỏa mãn phương trình $y'' = 0$ của (C).

Lời giải.

1. Phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại điểm A:

$y = y'(3)(x-3) + y(3) = -18x + 49$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C):

$-2x^3 + 6x^2 - 5 = -18x + 49 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x^2 - 18x + 54 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$

Suy ra giao điểm của (d) và (C) khác A là $B(-3;103)$.

2. Tồn tại ít nhất một tiếp tuyến của (C) có hệ số góc là a $\Leftrightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R}, y'(x_0) = a$

$\Leftrightarrow \exists x_0 : -6x_0^2 + 12x_0 = a$.

Bài toán quy về :Tìm a để phương trình $-6x^2 + 12x = a$ (1) có nghiệm.

(1) $\Leftrightarrow 6x^2 - 12x + a = 0$. (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 36 - 6a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 6$.

Vậy $a \leq 6$.

3. Từ giả thiết, suy ra hoành độ phương trình $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow I(1;-1)$.

Phương trình tiếp tuyến (D) của (C) đi qua $I(1;-1)$. có dạng : $y = k(x-1) - 1$.

(D) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_0^3 + 6x_0^2 - 5 = k(x_0 - 1) - 1 & (1) \\ -6x_0^2 + 12x_0 = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm x_0.

Thay (2) vào (1) ta được

$-2x_0^3+6x_0^2-5=(-6x_0^2+12x_0)(x_0-1)-1 \Leftrightarrow (x_0-1)^3=0 \Leftrightarrow x_0=1$

Suy ra phương trình $(\mathrm{d}): \mathrm{y}=6\mathrm{x}-7$

Ví dụ 6 : Cho hàm số $y=-\frac{2}{3}x^3+(m-1)x^2+(3m-2)x-\frac{5}{3}$ có đồ thị là (C). Tìm m để trên (C) có hai điểm phân biệt $M_1(x_1\,;\,y_1),\ M_2(x_2\,;\,y_2)$ thỏa mãn $x_1.x_2>0$ và tiếp tuyến của (C) tại mỗi điểm đó vuông góc với đường thẳng $d: x-3y+1=0.$

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=-2x^2+2(m-1)x+3m-2$.

Hệ số góc của $d: x-3y+1=0$ là $k_d=\frac{1}{3}$.

Tiếp tuyến tại điểm $M_1(x_1\,;\,y_1),\ M_2(x_2\,;\,y_2)$ vuông góc với d thì phải có: $y'=-3$

Trong đó $x_1,\ x_2$ là các nghiệm của phương trình:

$-2x^2+2(m-1)x+3m-2=-3 \quad \Leftrightarrow 2x^2-2(m-1)x-3m-1=0$ (1)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1.x_2>0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=(m-1)^2+2(3m+1)>0 \\ \dfrac{-3m-1}{2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-3 \\ -1<m<-\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Vậy, $m<-3$ hoặc $-1<m<-\frac{1}{3}$ thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 7 Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C): $y=x^3-6x^2+9x-2$ tại điểm M, biết M cùng 2 điểm cực trị của (C) tạo thành tam giác có diện tích bằng 6.

Lời giải.

Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị $A(1;2),\ B(3;-2)$ và đường thẳng đi qua 2 cực trị là AB: $2x+y-4=0$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của đồ thị (C) của hàm số và tiếp tuyến (d) cần tìm. Khi đó

$y_0=x_0^3-6x_0^2+9x_0-2$

Ta có: $AB=2\sqrt{5}$, $d(M;AB)=\frac{|2x_0+y_0-4|}{\sqrt{5}}$

Giả thiết $S_{MAB}=6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.AB.d(M;AB)=6 \ \Leftrightarrow |2x_0+y_0-4|=6$

$\Leftrightarrow 2x_0+y_0=10$ hoặc $2x_0+y_0=-2$

TH1: Tọa độ M thỏa mãn hệ: $\begin{cases} 2x_0+y_0=-2 \\ y_0=x_0^3-6x_0^2+9x_0-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0=-2-2x_0 \\ x_0(x_0^2-6x_0+11)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0=-2 \\ x_0=0 \end{cases}$ hay $M(0;-2)$

Tiếp tuyến tại M là: $y=9x-2$.

TH2: Tọa độ M thỏa mãn hệ: $\begin{cases} 2x_0 + y_0 = 10 \\ y_0 = x_0^3 - 6x_0^2 + 9x_0 - 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 10 - 2x_0 \\ (x_0 - 4)(x_0^2 - 6x_0 + 11) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 2 \\ x_0 = 4 \end{cases}$ hay $M(4;2)$

Tiếp tuyến tại M là: $y = 9x - 34$.

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài: $y = 9x - 2$ và $y = 9x - 34$

Ví dụ 8 : Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{2(x+1)}$ có đồ thị là (C). Tìm những điểm M trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng 4x + y = 0.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Gọi M($x_0; \dfrac{x_0 - 1}{2(x_0+1)}$) $\in (C)$ là điểm cần tìm.

Gọi Δ tiếp tuyến với (C) tại M ta có phương trình Δ :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{x_0 - 1}{2(x_0+1)} \Rightarrow y = \frac{1}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0 - 1}{2(x_0+1)}$$

Gọi $A = \Delta \cap Ox \Rightarrow A\left(-\dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2};0\right)$, $B = \Delta \cap Oy \Rightarrow B\left(0;\dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2(x_0+1)^2}\right)$.

Δ OAB có trọng tâm là: G($\left(-\dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6};\dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6(x_0+1)^2}\right)$.

Do G thuộc đường thẳng: 4x + y = 0 $\Rightarrow -4.\dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6} + \dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6(x_0+1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow 4 = \dfrac{1}{(x_0+1)^2}$ (vì A, B $\neq$ O nên $x_0^2 - 2x_0 - 1 \neq 0$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 + 1 = \dfrac{1}{2} \\ x_0 + 1 = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -\dfrac{1}{2} \\ x_0 = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Với $x_0 = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow M\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$

Với $x_0 = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow M\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$.

Ví dụ 9 :

1. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị $y = x^3 - 3x^2 + m$ tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho diện tích tam giác OAB có diện tích bằng 1,5

2. Tìm các giá trị dương của m để (C_m): $y = x^4 - 3(m+1)x^2 + 3m + 2$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt và tiếp tuyến tại điểm có hoành độ lớn nhất cùng với 2 trục tọa độ tạo thành tam giác có diện tích bằng 24 .

Lời giải.

1. $x=1\Rightarrow y(1)=m-2$ suy ra $M(1;m-2)$. Tiếp tuyến tại M là d: $y=-3x+m+2$.

d cắt Ox tại A nên $A(x_A;0)$ và $A\in d$ suy ra $A\left(\frac{m+2}{3};0\right)$

d cắt Oy tại B nên $B(0;y_B)$ và $B\in d$ suy ra $B(0;m+2)$

Diện tích tam giác OAB có diện tích bằng $1,5$ khi và chỉ khi $\frac{1}{2}.|OA|.|OB|=\frac{3}{2}$ hay

$|OA|.|OB|=3\Leftrightarrow\left|\frac{m+2}{3}\right|.|m+2|=3$ hay $(m+2)^2=9$ phương trình này có 2 nghiệm $m=-5$ hoặc $m=1$.

Vậy, $m=-5$ hoặc $m=1$ là giá trị cần tìm.

2. Phương trình hoành độ giao điểm (C_m) và trục hoành :

$x^4-3(m+1)x^2+3m+2=0\Leftrightarrow(x^2-1)\left[x^2-(3m+2)\right]=0$ $(*)$

Với $m>0$ thì (C_m) cắt trục hoành tại 4 giao điểm phân biệt và $x=\sqrt{3m+2}$ là hoành độ lớn nhất.

Gia sử $A\left(\sqrt{3m+2};0\right)$ là giao điểm có hoành độ lớn nhất và tiếp tuyến d tại A có phương trình:

$y=2(3m+1)\sqrt{3m+2}.x-2(3m+1)(3m+2)$

Gọi B là giao điểm của d và Oy suy ra $B\left(0;-2(3m+1)(3m+2)\right)$

Theo giả thiết, tam giác OAB vuông tại O và $S_{OAB}=24$ $\Leftrightarrow OA.OB=48$ hay $\sqrt{3m+2}\left(18m^2+22m+4\right)=48$ $(*)$

Xét $f(m)=\sqrt{3m+2}\left(18m^2+22m+4\right)-48,\ m>0$.

Ta có: $f'(m)>0$ với mọi $m>0$, suy ra $f(m)$ đồng biến với mọi $m>0$ và $f\left(\frac{2}{3}\right)=0$, do đó phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $m=\frac{2}{3}$.

Vậy, $m=\frac{2}{3}$ thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 10 Tìm $m\in\mathbb{R}$, để tiếp tuyến của đồ thị hàm số : $y=x^3-mx+m-1$ tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt đường tròn $(x-2)^2+(y-3)^2=\frac{1}{5}$ theo 1 dây cung có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải.

$y'=3x^2-m\Rightarrow y'(1)=3-m$. Với $x=1\Rightarrow y(1)=0\Rightarrow M(1;0)$.

Phương trình tiếp tuyến tại M: $y=y'(1)(x-1)\Leftrightarrow(3-m)x-y-3+m=0\,(d)$.

Đường tròn có tâm $I(2;3)$ và bán kính $R=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Vì $IM>R$ nên độ dài cung nhỏ nhất khi (d) tiếp xúc với đường tròn, tức là $d(I;(d))=R \Leftrightarrow \frac{|(3-m)2-3-3+m|}{\sqrt{(3-m)^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ hay $\frac{|m|}{\sqrt{m^2-6m+10}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$, bình phương hai vế và rút gọn ta được phương trình $2m^2+3m-5=0$, giải phương trình này ta được $m=1$ hoặc $m=\frac{5}{2}$ thỏa bài toán.

Ví dụ 11 : Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị $y=x^3-3x^2+m$ tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A và B sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB có chu vi $2\pi\sqrt{\frac{5}{18}}$.

Lời giải.

Với $x_0=1 \Rightarrow y_0=m-2 \Rightarrow \mathrm{M}(1;\mathrm{m}-2)$

Tiếp tuyến tại M là d: $y=(3x_0^2-6x_0)(x-x_0)+m-2 \Rightarrow \mathrm{d}: \mathrm{y}=-3\mathrm{x}+\mathrm{m}+1$

d cắt trục Ox tại A: $0=-3x_A+m+1 \Leftrightarrow x_A=\frac{m+1}{3} \Rightarrow \quad A\left(\frac{m+1}{3};0\right)$

d cắt trục Oy tại B : $y_B=m+1 \Rightarrow \quad B(0;m+1)$

Tam giác vuông tại O,Trung điểm I của AB là tâm đt ngoại tiếp $I\left(\frac{m+1}{6};\frac{m+1}{2}\right)$

BK OI=$\sqrt{\frac{5}{18}}|m+1|$

Giả thiết có $2\pi OI=2\pi\sqrt{\frac{5}{18}} \Leftrightarrow |m+1|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-2 \end{array}\right.$

Ví dụ 12. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến (t) của (C), biết:

1. (t) tiếp xúc với đường tròn: $(\gamma):(x-2)^2+(y-6)^2=45$.

2. Khoảng cách từ (t) đến điểm I(1;1) lớn nhất.

Lời giải.

1. Tịnh tiến $\overrightarrow{OI}$ với I(1;1), hệ trục Oxy $\Rightarrow$ hệ trục IXY.

Công thức chuyển hệ tọa độ : $\begin{cases} x=X+x_I=X+1 \\ y=Y+y_I=Y+1 \end{cases}$

Đối với hệ trục IXY thì A có tọa độ là $\begin{cases} X=x-1=2-1=1 \\ Y=y-1=6-1=5 \end{cases}$

Hàm số cho trở thành : $Y+1=\frac{X+1+1}{(X+1)-1}=\frac{X+2}{X} \Leftrightarrow Y=\frac{2}{X}=F(X).$

Phương trình của đường tròn (γ) là $(X-1)^2+(Y-5)^2=45$, (γ) có tâm A(1;5) , bán kính $R=3\sqrt{5}$.

Phương trình tiếp tuyến (D) của (C) tại điểm có hoành độ X_0 là

$$Y = F'(X_0)(X - X_0) + F(X_0) = -\frac{2}{X_0^2}(X - X_0) + \frac{2}{X_0} = -\frac{2}{X_0^2}X + \frac{4}{X_0} \Leftrightarrow 2X + X_0^2Y - 4X_0 = 0.$$

(D) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \mathrm{d}(\mathrm{A},(\mathrm{D})) = \mathrm{R}$

$$\Leftrightarrow d[A,(D)) = \frac{|2 + 5X_0^2 - 4x_0|}{\sqrt{4 + X_0^4}} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow [(d(A,(D))]^2 = \frac{(5X_0^2 - 4X_0 + 2)^2}{4 + X_0^4} = 45$$

$$\Leftrightarrow 25X_0^4 + 16X_0^2 + 4 - 40X_0^3 + 20X_0^2 - 16X_0 = 180 + 45X_0^4$$

$$\Leftrightarrow 5X_0^4 + 10X_0^3 - 9X_0^2 + 4X_0 + 44 = 0 \Leftrightarrow (X_0 + 2)^2(5X_0^2 - 10X_0 + 11) = 0 \Leftrightarrow X_0 = -2$$

Vậy phương trình (D): $Y = -\frac{1}{2}X - 2$,suy ra phương trình (D) đối với hệ trục xuất phát Oxy là : $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) - 2 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

2. Đối với hệ tọa độ IXY , phương trình tiếp tuyến (d) có dạng :

$$2X + X_0^2Y - 4X_0 = 0,\ d(I,(d)) = \frac{|4X_0|}{\sqrt{4 + X_0^4}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ,ta có : $4 + X_0^4 \geq 2\sqrt{4X_0^4} = 4X_0^2$

$$\Rightarrow d(I,(d)) \leq \frac{|4X_0|}{\sqrt{4X_0^2}} = \frac{|4X_0|}{|2X_0|} = 2 \Rightarrow d(I,(d)) = 2 \Leftrightarrow X_0^4 = 4 \Leftrightarrow X_0 = \pm\sqrt{2}$$

Khi đó phương trình tiếp tuyến (d): $Y = -X + 2\sqrt{2}, Y = -X - 2\sqrt{2}$.

Suy ra phương trình (d) đối với hệ trục Oxy là $y = -x + 2 \pm 2\sqrt{2}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho hàm số $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$ có đồ thị là (C). Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B thoả mãn $OA = 4OB$.

A. $\left[\begin{array}{l} y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4} \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \\ y = -\frac{1}{4}x - \frac{13}{4} \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \\ y = -\frac{1}{4}x - \frac{13}{4} \end{array}\right.$

✍***Bài làm 1.*** Giả sử tiếp tuyến (d) của (C) tại $M(x_0; y_0) \in (C)$ cắt Ox tại A, Oy tại B sao cho $OA = 4OB$.

Do ΔOAB vuông tại O nên $\tan A = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{4} \Rightarrow$ Hệ số góc của (d) bằng $\frac{1}{4}$ hoặc $-\frac{1}{4}$.

Hệ số góc của (d) là $y'(x_0) = -\frac{1}{(x_0 - 1)^2} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{(x_0 - 1)^2} = -\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \left(y_0 = \dfrac{3}{2}\right) \\ x_0 = 3 \quad \left(y_0 = \dfrac{5}{2}\right) \end{array}\right.$

Khi đó có 2 tiếp tuyến thoả mãn là: $\left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{4}(x+1) + \dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{1}{4}(x-3) + \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4} \\ y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{13}{4} \end{array}\right.$.

Bài 2:

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm M thuộc (C) biết tiếp tuyến đó cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A,B sao cho côsin góc ABI bằng $\dfrac{4}{\sqrt{17}}$, với $I(2;2)$.

A. $y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{2}$; $y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{7}{2}$

B. $y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{2}$; $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{7}{2}$

C. $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{2}$; $y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{7}{2}$

D. $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{2}$; $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{7}{2}$

✍***Bài làm* 1.** $I(2;\ 2)$, gọi $M\left(x_0; \dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right) \in (C)$, $x_0 \neq 2$

Phương trình tiếp tuyến Δ tại M: $y = -\dfrac{1}{(x_0-2)^2}(x - x_0) + \dfrac{2x_0-3}{x_0-2}$

Giao điểm của Δ với các tiệm cận: $A\left(2; \dfrac{2x_0-2}{x_0-2}\right)$, $B(2x_0-2; 2)$.

Do $\cos ABI = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$ nên $\tan ABI = \dfrac{1}{4} = \dfrac{IA}{IB}$ $\Leftrightarrow IB^2 = 16.IA^2 \Leftrightarrow (x_0-2)^4 = 16$ $\Leftrightarrow x_0 = 0$ hoặc $x_0 = 4$

Tại $M\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$ phương trình tiếp tuyến: $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{2}$

Tại $M\left(4; \dfrac{5}{3}\right)$ phương trình tiếp tuyến: $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{7}{2}$

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.Tìm trên hai nhánh của đồ thị (C), các điểm M, N sao cho các tiếp tuyến tại M và N cắt hai đường tiệm cận tại 4 điểm lập thành một hình thang.

A. $M(2;5), N(0;-1)$ **B.** $M\left(3;\dfrac{7}{2}\right), N\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$ **C.** $M(2;5), N\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$ **D.** Với mọi M, N

✍***Bài làm* 2.** Gọi $M(m; y_M)$, $N(n; y_N)$ là 2 điểm thuộc 2 nhánh của (C).

Tiếp tuyến tại M cắt hai tiệm cận tại A, B. Tiếp tuyến tại N cắt hai tiệm cận tại C, D.

Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng: $y = y'(m).(x-m) + y_M$

$\Rightarrow A\left(1;\dfrac{2m+4}{m-1}\right), B(2m-1;2)$. Tương tự: $C\left(1;\dfrac{2n+4}{n-1}\right), D(2n-1;2)$.

Hai đường thẳng AD và BC đều có hệ số góc: $k=\dfrac{-3}{(m-1)(n-1)}$ nên AD // BC.

Vậy mọi điểm M, N thuộc 2 nhánh của (C) đều thoả mãn bài toán.

Bài 3:

Câu 1. Biết với một điểm M tùy ý thuộc $(C): y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$, tiếp tuyến tại M cắt (C) tại hai điểm A,B tạo với $I(-2;-1)$ một tam giác có diện tích không đổi , Diện tích tam giác đó là?.

A. 2(đvdt) **B.4**(đvdt) **C.5**(đvdt) **D. 7**(đvdt)

✍***Bài làm 1.*** $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}=x+1+\dfrac{1}{x+2}$. Ta có : $y'=1-\dfrac{1}{(x+2)^2}$.

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow y_0=x_0+1+\dfrac{1}{x_0+2}(*)$

Tiếp tuyến với (C) tại M là $\Delta: y=\left[1-\dfrac{1}{(x_0+2)^2}\right](x-x_0)+x_0+1+\dfrac{1}{x_0+2}$

Nếu $\Delta\cap x=-2$ tại điểm A , thì $y_A=-\dfrac{x_0}{x_0+2}\Rightarrow A\left(-2;-\dfrac{x_0}{x_0+2}\right)$

Nếu Δ cắt tiệm cận xiên tại điểm B thì

$\left[1-\dfrac{1}{(x_0+2)^2}\right](x_B-x_0)+x_0+1+\dfrac{1}{x_0+2}=x_B+1\Leftrightarrow x_B=2x_0+2\Rightarrow y_B=x_B+1=2x_0+3$

$\Rightarrow B(2x_0+2;2x_0+3)$

Nếu I là giao hai tiệm cận , thì I có tọa độ $I(-2;-1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên tiệm cận đứng $x=-2$ suy ra $H(-2;2x_0+3)$

Diện tích tam giác $AIB: S=\dfrac{1}{2}AI.BH=\dfrac{1}{2}|y_A-y_I|.|x_B-x_H|=\dfrac{1}{2}\left|-\dfrac{x_0}{x_0+2}+1\right||2x_0+2+2|$

Hay $S=\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{|x_0+2|}.2|x_0+2|=2$ (đvdt)

Chứng tỏ S là một hằng số , không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

Câu 2. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$, có đồ thị là (C).Tìm trên đường thẳng $d: y=2x+1$ các điểm từ đó kẻ được duy nhất một tiếp tuyến tới (C).

A. $\left[\begin{array}{l} M(0;1) \\ M(-1;-1) \\ M(2;5) \\ M(1;3) \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} M(5;11) \\ M(-1;-1) \\ M(7;15) \\ M(1;3) \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} M(4;9) \\ M(-1;-1) \\ M(2;5) \\ M(1;3) \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} M(0;1) \\ M(-1;-1) \\ M(3;7) \\ M(-2;-3) \end{array}\right.$

✍***Bài làm* 2.** Gọi $M(m;2m+1)\in d$.

Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc k có dạng: $y=k(x-m)+2m+1$

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (C): $k(x-m)+2m+1=\dfrac{x+3}{x-1}$

$\Leftrightarrow kx^2-\left[(m+1)k-2m\right]x+\left[mk-(2m+4)\right]=0$ (*)

Δ tiếp xúc với (C) ⇔ (*) có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 0 \\ \Delta=\left[(m+1)k-2m\right]^2-4k\left[mk-(2m+4)\right]=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 0 \\ g(k)=(m-1)^2k^2-4(m^2-m-4)k+4m^2=0 \end{cases}$

Qua $M(m;2m+1)\in d$ kẻ được đúng 1 tiếp tuyến đến (C)

$\Leftrightarrow g(k)=0$ có đúng 1 nghiệm $k\neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta'=-32(m^2-m-2)>0; g(0)=4m^2=0 \\ \Delta'=-32(m^2-m-2)>0; g(0)=4m^2=0 \\ m-1=0\Rightarrow 16k+4=0\Rightarrow k=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m=0 & \Rightarrow M(0;1) \\ m=-1 & \Rightarrow M(-1;-1) \\ m=2 & \Rightarrow M(2;5) \\ m=1 & \Rightarrow M(1;3) \end{array}\right.$

Bài 4: Cho hàm số $y=-x^3+3x+2$ có đồ thị là (C).

Câu 1. Đồ thị (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ bằng?

A. 1 **B.2** **C.3** **D.** -1

✍***Bài làm* 1**. Xét hệ phương trình : $\begin{cases} -x^3+3x+2=0 \\ -3x^2+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$

Vậy (C) tiếp xúc với Ox tại điểm có hoành độ $x=-1$.

Câu 2.Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của (C) với trục hoành.

A. $y=0$; $y=-9x+18$ **B.** $y=0$; $y=-9x+3$

C. $y=0$; $y=-9x+8$ **D.** $y=0$; $y=-9x+1$

✍***Bài làm* 2**. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox.

$-x^3+3x+2=0 \Leftrightarrow x=-1, x=2$.

* $x=-1\Rightarrow y=0,\ y'(1)=0$ phương trình tiếp tuyến: $y=0$.

* $x=2\Rightarrow y=0, y'(2)=-9$ phương trình tiếp tuyến: $y=-9(x-2)=-9x+18$.

Câu 3. Tìm những điểm trên trục hoành sao cho từ đó kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị hàm số và trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

A. $M\left(-\frac{8}{27};0\right)$ **B.** $M\left(-\frac{28}{7};0\right)$ **C.** $M\left(-\frac{8}{7};0\right)$ **D.** $M\left(-\frac{28}{27};0\right)$

***Bài làm* 3**. Xét điểm $M(m;0)\in Ox$.

Cách 1: Đường thẳng d đi qua M, hệ số góc k có phương trình: $y=k(x-m)$.

d là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow$ hệ $\begin{cases}-x^3+3x+2=k(x-m)\\-3x^2+3=k\end{cases}$ có nghiệm x

Thế k vào phương trình thứ nhất, ta được:

$3(x^2-1)(x-m)-(x^3-3x-2)=0$

$\Leftrightarrow(x+1)(3x^2-3(1+m)x+3m)-(x+1)(x^2-x-2)=0$

$\Leftrightarrow(x+1)[2x^2-(3m+2)x+3m+2]=0\ (1)$

$\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $2x^2-(3m+2)x+3m+2=0\ (2)$

Để từ M kẻ được ba tiếp tuyến thì (1) phải có nghiệm x, đồng thời phải có 3 giá trị k khác nhau, khi đó (2) phải có hai nghiệm phân biệt khác -1, đồng thời phải có 2 giá trị k khác nhau và khác 0

(2) phải có hai nghiệm phân biệt khác -1 khi và chỉ khi : $\begin{cases}\Delta=(3m+2)(3m-6)>0\\3m+3\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-\frac{2}{3}, m>2\\m\neq-1\end{cases}\ (3)$

Với điều kiện (3), gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (2), khi đó hệ số góc của ba tiếp tuyến là

$k_1=-3x_1^2+3,\ k_2=-3x_2^2+3,\ k_3=0$.

Để hai trong ba tiếp tuyến này vuông góc với nhau $k_1.k_2=-1$ và $k_1\neq k_2$

$k_1.k_2=-1\Leftrightarrow 9(x_1^2-1)(x_2^2-1)=-1\Leftrightarrow 9x_1^2x_2^2-9(x_1+x_2)^2+18x_1x_2+10=0\ (i)$

Mặt khác theo Định lí Viet $x_1+x_2=\frac{3m+2}{2};\ x_1x_2=\frac{3m+2}{2}$.

Do đó $(i)\Leftrightarrow 9(3m+2)+10=0\Leftrightarrow m=-\frac{28}{27}$ thỏa điều kiện (3), kiểm tra lại ta thấy $k_1\neq k_2$

Vậy, $M\left(-\frac{28}{27};0\right)$ là điểm cần tìm.

Cách 2: Gọi $N(x_0;y_0)\in(C)$. Tiếp tuyến Δ của (C) tại N có phương trình : $y=\left(-3x_0^2+3\right)(x-x_0)+y_0$.

Δ đi qua $M\Leftrightarrow 0=\left(-3x_0^2+3\right)(m-x_0)+y_0$

$\Leftrightarrow 3(x_0-1)(x_0+1)(x_0-m)-(x_0+1)^2(x_0-2)=0$

$\Leftrightarrow(x_0+1)\left[2x_0^2-(3m+2)x_0+3m+2\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\\2x_0^2-(3m+2)x_0+3m+2=0\quad\text{(a)}\end{array}\right.$

Từ M vẽ được đến (C) ba tiếp tuyến $\Leftrightarrow (a)$ có hai nghiệm phân biệt khác -1, và có hai giá trị $k=-3x_0^2+3$ khác nhau và khác 0 điều đó xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\Delta=(3m+2)^2-8(3m+2)>0\\ 2+2(3m+2)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(3m+2)(3m-6)>0\\ 3m+3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq -1\\ m<-\dfrac{2}{3}, m>2\end{cases}\quad (b).$$

Vì tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=-1$ có hệ số góc bằng 0 nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow(-3p^2+3)(-3q^2+3)=-1$ (trong đó p,q là hai nghiệm của phương trình (a)) $\Leftrightarrow 9p^2q^2-9(p^2+q^2)+10=0 \Leftrightarrow 9p^2q^2-9(p+q)^2+18pq+10=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{9(3m+2)^2}{4}-\dfrac{9(3m+2)^2}{4}+9(3m+2)+10=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{28}{27}$. Vậy $M\left(-\dfrac{28}{27};0\right)$.

Bài 5. Cho hàm số $y=x^4-2x^2-1$ có đồ thị là (C).

Câu 1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d:24x-y+1=0$.

A. $\Delta: y=24x-4$ **B.** $\Delta: y=24x-42$ **C.** $\Delta: y=24x-23$ **D.** $\Delta: y=4x-42$

***Bài làm* 1.** Ta có $y'=4x^3-4x$

Gọi $A(x_0;y_0)\in(C)$. Tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình

$\Delta: y=(4x_0^3-4x_0)(x-x_0)+y_0$

Tiếp tuyến song song với $d: y=24x+1$ nên ta có: $4x_0^3-4x_0=24$

$\Leftrightarrow x_0^3-x_0-6=0 \Leftrightarrow x_0=2 \Rightarrow y_0=7$. Vậy $\Delta: y=24x-42$.

Câu 2. Tìm $M\in Oy$ sao cho từ M vẽ đến (C) đúng ba tiếp tuyến.

A. $M(0;-2)$ **B.** $M(0;-1)$ **C.** $M(0;-5)$ **D.** $M(0;-9)$

***Bài làm* 2.** Ta có $y'=4x^3-4x$

Gọi $A(x_0;y_0)\in(C)$. Tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình

$\Delta: y=(4x_0^3-4x_0)(x-x_0)+y_0$

Vì (C) nhận Oy làm trục đối xứng nên nếu d là một tiếp tuyến của (C) thì đường thẳng d' đối xứng với d qua Oy cũng là tiếp tuyến của (C). Do đó, để từ M vẽ được ba tiếp tuyến đến (C) thì trong ba tiếp tuyến đó phải có một tiếp tuyến vuông góc với Oy. Mà (C) có hai tiếp tuyến cùng phương với Ox là: $y=-2$ và $y=-1$. Đường thẳng này cắt Oy tại $M_1(0;-2)$, $M_2(0;-1)$.

Ta kiểm tra được qua M_1 chỉ vẽ đến (C) được một tiếp tuyến, còn từ M_2 vẽ đến (C) được ba tiếp tuyến.

Vậy $M(0;-1)$ là điểm cần tìm.

Câu 3. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tiếp xúc với (C) tại hai điểm phân biệt.

A. $y=-2x$ **B.** $y=-2x+1$ **C.** $y=-2$ **D.** $y=-4$

***Bài làm* 3.** Ta có $y'=4x^3-4x$

Gọi $A(x_0;y_0)\in(C)$. Tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình

$\Delta: y=(4x_0^3-4x_0)(x-x_0)+y_0$

Giả sử Δ là tiếp tuyến tiếp xúc với (C) tại hai điểm phân biệt

$M(m;m^4-2m^2-1)$ và $N(n;n^4-2n^2-1)$ với $m\neq n$.

Ta có phương trình $\Delta: y=y'(m)(x-m)+y(m)$

$\Delta: y=y'(n)(x-n)+y(n)$

Suy ra $\begin{cases} y'(m)=y'(n) \\ -m.y'(m)+y(m)=-n.y'(n)+y(n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4n^3-4n=4m^3-4m \\ -3m^4+2m^2-1=-3n^4+2n^2-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (n-m)(n^2+mn+n^2)-(n-m)=0 \\ 3(n^2-m^2)(n^2+m^2)-2(n^2-m^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2+mn+n^2-1=0 \\ (n+m)\left[3(n^2+m^2)-2\right]=0 \quad (*) \end{cases}$

Từ (*) ta có: $m+n=0$ hoặc $n^2+m^2=\dfrac{2}{3}$.

- $m+n=0\Rightarrow m=-n\Rightarrow n^2=1\Leftrightarrow n=\pm1$
- $m^2+n^2=\dfrac{2}{3}\Rightarrow \begin{cases} mn=\dfrac{1}{3} \\ (m+n)^2=\dfrac{4}{3} \end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy $y=-2$ là tiếp tuyến cần tìm.

Bài 6 Cho hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có đồ thị là (C).

1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

A. $y=-2x+2$ **B.** $y=-x+2$ **C.** $y=-12x+7$ **D.** $y=-12x+2$

✍***Bài làm* 1**. Ta có: $y'=3(x^2-2x-3)$. Do $y'=3\left[(x-1)^2-4\right]\geq-12\Rightarrow \min y'=-12$, đạt được khi $x=1$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-12x+2$.

Câu 2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d: y=-x+1$ một góc α thỏa $\cos\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{41}}$.

A. $y=-\dfrac{1}{9}\left(x-\dfrac{9\pm\sqrt{321}}{9}\right)+9$ **B.** $y=-\dfrac{1}{9}\left(x-\dfrac{9\pm\sqrt{321}}{9}\right)+34$

C. $y=-\dfrac{1}{9}\left(x-\dfrac{9\pm\sqrt{321}}{9}\right)+7$ **D.** đáp án khác

✍***Bài làm* 2**. Ta có: $y'=3(x^2-2x-3)$. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm

Phương trình tiếp tuyến Δ tại M: $y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$

Hay $kx-y+b=0$, Với $k=y'(x_0)$

Theo bài ra ta có: $\cos\alpha=\dfrac{|k-1|}{\sqrt{k^2+1}.\sqrt{2}}=\dfrac{5}{\sqrt{41}}$

$\Leftrightarrow 41(k-1)^2 = 50(k^2+1) \Leftrightarrow 9k^2+82k+9=0 \Leftrightarrow k=-9, k=-\frac{1}{9}$.

- $k=-9 \Leftrightarrow x_0^2-2x_0=0 \Leftrightarrow x_0=0, x_0=2$

Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến: $y=-9x+1$ và $y=-9x-3$

- $k=-\frac{1}{9} \Leftrightarrow 27x_0^2-54x_0-80=0 \Leftrightarrow x_0=\frac{9\pm\sqrt{321}}{9}$

Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến là: $y=-\frac{1}{9}\left(x-\frac{9\pm\sqrt{321}}{9}\right)+y(x_0)$.

Câu 3. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1;6)$.

A. $y=7; y=-9x-3$ **B.** $y=6; y=-9x-7$ **C.** $y=6; y=-2x-3$ **D.** $y=6; y=-9x-3$

✍***Bài làm* 3**. Ta có: $y'=3(x^2-2x-3)$. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến Δ tại M: $y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$.

Do tiếp tuyến đi qua A nên ta có phương trình

$6=3(x_0^2-2x_0-3)(-1-x_0)+x_0^3-3x_0^2-9x_0+1$

$\Leftrightarrow x_0^3-3x_0-2=0 \Leftrightarrow (x_0+1)^2(x_0-2)=0 \Leftrightarrow x_0=-1, x_0=2$

- $x_0=-1 \Rightarrow y=6$
- $x_0=2 \Rightarrow y=-9x-3$

Bài 7:

Câu 1. Cho hàm số $y=x^3+2x^2+x+1$. Tìm các điểm thuộc đồ thị hàm số mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với một tiếp tuyến khác của đồ thị.

A. $M(1;5)$ **B.** $N(-1;1)$ **C.** $E(0;1)$ **D.** Đáp án khác

✍***Bài làm* 1.** Gọi $A(a;f(a))$ là điểm thuộc đồ thị.

Khi đó tiếp tuyến tại A có hệ số góc $k=3a^2+4a+1$

* Nếu $a=-\frac{1}{3}; a=-1$ hiển nhiên không có tiếp tuyến nào vuông góc với tiếp tuyến tại A.

* Nếu $k\neq 0$. Ta xét phương trình: $3x^2+4x+1=-\frac{1}{3a^2+4a+1}$

$3x^2+4x+1+\frac{1}{3a^2+4a+1}=0$ (1).

Để tồn tại tiếp tuyến vuông góc với tiếp tuyến tại A thì (1) phải có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta'=4-3(1+\frac{1}{3a^2+4a+1})\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3a^2+4a+1}-\frac{1}{3}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{3a^2+4a-2}{3a^2+4a+1}\geq 0$

$\Leftrightarrow a\in\left(-\infty;\frac{-2-\sqrt{10}}{3}\right]\cup\left(-1;-\frac{1}{3}\right)\cup\left[\frac{-2+\sqrt{10}}{3};+\infty\right)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị là (C). Tìm toạ độ điểm M thuộc $d: y = -3x + 2$ sao cho từ M kẻ được đến (C) hai tiếp tuyến và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

A. $M(1;-1)$ **B.** $M(3;-7)$ **C.** $M(-1;5)$ **D.** $M(0;2)$

✍***Bài làm*** **2.** Gọi $M(m;-3m+2) \in d$

Phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại $A(x_0;y_0)$:

$y = (3x_0^2 - 3)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0 + 2$

Tiếp tuyến đi qua M $\Leftrightarrow -3m + 2 = (3x_0^2 - 3)(m - x_0) + x_0^3 - 3x_0 + 2$

$\Leftrightarrow x_0^2(2x_0 - 3m) = 0$ .Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = 0$. Vậy $M(0;2)$.

Bài 8:

Câu 1. Gọi (C) là đồ thị của hàm số y = $\dfrac{2x+m}{x-2}$,m là tham số khác – 4 và (d) là một tiếp tuyến của (C) .Tìm m để (d) tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác có diện tích bằng 2.

A. $\left[\begin{array}{l} m = -6 \\ m = -5 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = 5 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = 6 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = -5 \end{array}\right.$

✍***Bài làm*** **1.** Hai đường tiệm cận đứng và ngang của (C) có phương trình lần lượt là x = 2, y = 2 ,suy ra giao điểm của chúng là I(2;2).

Tịnh tiến $\overrightarrow{OI}$. Hệ trục Oxy $\Rightarrow$ Hệ trục IXY.

Công thức chuyển hệ tọa độ : $\begin{cases} x = X + x_I = X + 2 \\ y = Y + y_I = Y + 2 \end{cases}$

Đối với hệ trục IXY .

Hai đường tiệm cận đứng và ngang của (C) có phương trình lần lượt là X = 0 , Y = 0.

(C) có phương trình là $Y + 2 = \dfrac{2(X+2)+m}{X+2-2} \Rightarrow Y = F(X) = \dfrac{4+m}{X}$.

Gọi X_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến (d) với (C) thì phương trình (d) là

$$Y = -\frac{m+4}{X_0^2}(X - X_0) + \frac{m+4}{X_0} = -\frac{m+4}{X_0^2}X + \frac{2m+8}{X_0}.$$

Gọi A là giao điểm của (C) với đường tiệm cận đứng của nó thì $A\left(0;\dfrac{2m+8}{X_0}\right)$

Gọi B là giao điểm của (C) với đường tiệm cận ngang của nó thì B($2X_0$; 0)

Diện tích tam giác vuông IAB do (d) tạo với hai đường tiệm cận là

$$S = \frac{1}{2}IA.IB = \frac{1}{2}|Y_A||X_B| = \frac{1}{2}\left|\frac{2m+8}{X_0}\right||2X_0| = |2m+8|.$$

$$S = 2 \Leftrightarrow |2m+8| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m+8 = 2 \\ 2m+8 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = -5 \end{array}\right..$$

Câu 2. Cho hàm số $y = x^3 + 1 - m(x+1)$ có đồ thị là (C_m). Có bao nhiêu giá trị m để tiếp tuyến của (C_m) tại giao điểm của nó với trục tung tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

✍***Bài làm* 2.** Ta có $M(0;1-m)$ là giao điểm của (C_m) với trục tung

$y' = 3x^2 - m \Rightarrow y'(0) = -m$

Phương trình tiếp tuyến với (C_m) tại điểm m là $y = -mx + 1 - m$

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến này với trục hoanh và trục tung, ta có tọa độ $A\left(\frac{1-m}{m};0\right)$ và $B(0;1-m)$

Nếu $m = 0$ thì tiếp tuyến song song với Ox nên loại khả năng này

Nếu $m \neq 0$ ta có

$$S_{OAB} = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}OA.OB = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\frac{1-m}{m}\right||1-m| = 8 \Leftrightarrow \frac{(1-m)^2}{|m|} = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 9 \pm 4\sqrt{5} \\ m = -7 \pm 4\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy có 4 giá trị cần tìm

Bài 9:

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$.Tìm giá trị nhỏ nhất của m sao cho tồn tại ít nhất một điểm M ∈ (C) mà tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai trục toạ độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $d: y = 2m - 1$.

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{2}{3}$

✍***Bài làm* 1.** Gọi $M(x_0;y_0) \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến tại M : $y = \frac{-3}{(2x_0-1)^2}(x - x_0) + y_0$

Gọi A, B là giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành và trục tung

$$\Rightarrow y_B = \frac{2x_0^2 + 4x_0 - 1}{(2x_0-1)^2}.$$

Từ đó trọng tâm G của ΔOAB có: $y_G = \frac{2x_0^2 + 4x_0 - 1}{3(2x_0-1)^2}$.

Vì G ∈ d nên $\frac{2x_0^2 + 4x_0 - 1}{3(2x_0-1)^2} = 2m - 1$

Mặt khác: $\frac{2x_0^2 + 4x_0 - 1}{(2x_0-1)^2} = \frac{6x_0^2 - (2x_0-1)^2}{(2x_0-1)^2} = \frac{6x_0^2}{(2x_0-1)^2} - 1 \geq -1$

Do đó để tồn tại ít nhất một điểm M thoả bài toán thì $2m - 1 \geq -\frac{1}{3} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3}$.

Vậy GTNN của m là $\frac{1}{3}$.

Câu 2. Cho hàm số $y=\frac{2mx+3}{x-m}$.Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Tìm m để tiếp tuyến tại một điểm bất kì của (C) cắt hai tiệm cận tại A và B sao cho ΔIAB có diện tích $S=22$.

A. $m=\pm5$ **B.** $m=\pm6$ **C.** $m=\pm7$ **D.** $m=\pm4$

✍***Bài làm* 2.** (C) có tiệm cận đứng $x=m$, tiệm cận ngang $y=2m$.

Giao điểm 2 tiệm cận là $I(m;2m)$ và $M\left(x_0;\frac{2mx_0+3}{x_0-m}\right)\in(C)$.

Phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại M: $y=\frac{2m^2+3}{(x_0-m)^2}(x-x_0)+\frac{2mx_0+3}{x_0-m}$.

Δ cắt TCĐ tại $A\left(m;\frac{2mx_0+2m^2+6}{x_0-m}\right)$, cắt TCN tại $B(2x_0-m;2m)$.

Ta có: $IA=\left|\frac{4m^2+6}{x_0+m}\right|$; $IB=2|x_0-m|$ $\Rightarrow S_{IAB}=\frac{1}{2}IA.IB=4m^2+6=22\Leftrightarrow m=\pm4$.

Câu 3. Gọi (d)là tiếp tuyến của đồ thị $(C):y=\frac{2x-3}{x-2}$ tại M cắt các đường tiệm cận tại hai điểm phân biệt A,B. Tìm tọa độ điểm M sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất , với I là giao điểm hai tiệm cận .

A. $M(1;1)$ $M\left(-1;\frac{5}{3}\right)$ **B.** $M\left(4;\frac{5}{3}\right)$ $M(3;3)$ **C.** $M(1;1)$ $M\left(4;\frac{5}{3}\right)$ **D.** $M(1;1)$ $M(3;3)$

✍***Bài làm* 3.** Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow y_0=\frac{2x_0-3}{x_0-2}$ và $y'_0=-\frac{1}{(x_0-2)^2}$

Phương trình tiếp tuyến (d) của (C)tại $M:y=\frac{-1}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-3}{x_0-2}$

(d) cắt hai đường tiệm cận tại hai điểm phân biệt $A\left(2;\frac{2x_0-2}{x_0-2}\right)$, $B(2x_0-2;2)$.

Dễ thấy M là trung điểm AB và $I(2;2)$ là giao điểm hai đường tiệm cận.

Tam giác IAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích

$$S=\pi IM^2=\pi\left[(x_0-2)^2+\left(\frac{2x_0-3}{x_0-2}-2\right)^2\right]=\pi\left[(x_0-2)^2+\frac{1}{(x_0-2)^2}\right]\ge2\pi$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $(x_0-2)^2=\frac{1}{(x_0-2)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\Rightarrow y_0=1\\x_0=3\Rightarrow y_0=3\end{array}\right.$

Vậy $M(1;1)$ $M(3;3)$ thỏa mãn bài toán.

Bài toán có thể mở rộng : Tìm những điểm trên (C)có hoành độ $x>2$ sao cho tiếp tuyến tại đó tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

HD: theo trên ta có : $A\left(2;\frac{2x_0-2}{x_0-2}\right), B\left(2x_0-2;2\right) \Rightarrow IA, IB$ .Chu vi tam giác AIB

là $P = IA + IB + AB = IA + IB + \sqrt{IA^2 + IB^2} \geq 2\sqrt{IA.IB} + \sqrt{2.IA.IB}$

Đẳng thức xảy ra khi $IA = IB$

Nếu trường hợp tam giác AIB không vuông thì $P = IA + IB + AB$, để tính AB ta cần đến định lý hàm số cosin $AB^2 = IA^2 + IB^2 - 2IA.IB\cos\left(IA, IB\right)$.

$$P = IA + IB + \sqrt{AB^2} \geq 2\sqrt{IA.IB} + \sqrt{IA^2 + IB^2 - 2IA.IB\cos\left(IA, IB\right)}$$

$P \geq 2\sqrt{IA.IB} + \sqrt{2IA.IB - 2IA.IB\cos\left(IA, IB\right)}$. Đẳng thức xảy ra khi $IA = IB$.

Bài 10: Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$, có đồ thị là (C). Có bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt Ox, Oy tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{1}{4}$, O là gốc tọa độ.

A. 1 **B.2** **C.3** **D. 4**

***Bài làm* 1.** Gọi $M\left(x_0; y_0\right) \in (C) \Rightarrow y_0 = \frac{2x_0}{x_0+1} \Rightarrow y'_0 = \frac{2}{\left(x_0+1\right)^2}$

Phương trình tiếp tuyến (t) của (C) tại M là : $y_0 = \frac{2}{\left(x_0+1\right)^2}x + \frac{2x_0^2}{\left(x_0+1\right)^2}$.

Tiếp tuyến (t) cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm phân biệt $A\left(-x_0^2; 0\right)$,

$B\left(0; \frac{2x_0^2}{\left(x_0+1\right)^2}\right)$ sao cho diện tích tam giác AOB có diện tích bằng $\frac{1}{4}$ khi đó

$$\frac{1}{2}.OA.OB = \frac{1}{4} \Leftrightarrow OA.OB = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0^2.\frac{2x_0^2}{\left(x_0+1\right)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x_0^2 - \left(x_0+1\right)^2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x_0^2 + x_0 + 1 = 0 \\ 2x_0^2 - x_0 - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}; -2\right) \\ x_0 = 1 \Rightarrow M(1;1) \end{array}\right..$$

Bài 12: Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C).

Câu 1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -4x + 1$.

A. $\Delta: y = -4x + 2$; $\Delta: y = -4x + 1$

B. $\Delta: y = -4x + 2$; $\Delta: y = -4x + 7$

C. $\Delta: y = -4x + 6$; $\Delta: y = -4x + 14$

D. $\Delta: y = -4x + 2$; $\Delta: y = -4x + 14$

***Bài làm* 1**. Hàm số xác định với mọi $x \neq 1$.

Ta có: $y' = \frac{-4}{(x-1)^2}$

Tiệm cận đứng: $x=1$; tiệm cận ngang: $y=2$; tâm đối xứng $I(1;2)$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

$$\Delta: y=\frac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0+2}{x_0-1}.$$

Vì tiếp tuyến song với đường thẳng $d: y=-4x+1$ nên ta có:

$$y'(x_0)=-4 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x_0-1)^2}=-4 \Leftrightarrow x_0=0, x_0=2.$$

* $x_0=0 \Rightarrow y_0=2 \Rightarrow \Delta: y=-4x+2$

* $x_0=2 \Rightarrow y_0=6 \Rightarrow \Delta: y=-4x+14$.

Câu 2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

A. $\Delta: y=-x+7$; $\Delta: y=-x-1$ **B.** $\Delta: y=-2x+7$; $\Delta: y=-x-11$

C. $\Delta: y=-x+78$; $\Delta: y=-x-11$ **D.** $\Delta: y=-x+9$; $\Delta: y=-x-1$

✍***Bài làm* 2**. Hàm số xác định với mọi $x\neq 1$.

Ta có: $y'=\frac{-4}{(x-1)^2}$

Tiệm cận đứng: $x=1$; tiệm cận ngang: $y=2$; tâm đối xứng $I(1;2)$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

$$\Delta: y=\frac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0+2}{x_0-1}.$$

Vì tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng ± 1.

$$\frac{-4}{(x_0-1)^2}=\pm 1 \Leftrightarrow x_0=-1, x_0=3$$

* $x_0=-1 \Rightarrow y_0=0 \Rightarrow \Delta: y=-x-1$

* $x_0=3 \Rightarrow y_0=4 \Rightarrow \Delta: y=-x+7$

Câu 3. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với hai tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

A. $\Delta: y=-x-21$ và $\Delta: y=-x+7$. **B.** $\Delta: y=-x-3$ và $\Delta: y=-x+2$.

C. $\Delta: y=-x-1$ và $\Delta: y=-x+17$. **D.** $\Delta: y=-x-1$ và $\Delta: y=-x+7$.

✍***Bài làm* 3**. Hàm số xác định với mọi $x\neq 1$.

Ta có: $y'=\frac{-4}{(x-1)^2}$

Tiệm cận đứng: $x=1$; tiệm cận ngang: $y=2$; tâm đối xứng $I(1;2)$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

$$\Delta: y=\frac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0+2}{x_0-1}.$$

Tiếp tuyến cắt tiệm cận đứng tại

$A:\begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{-4}{(x_0-1)^2}(1-x_0)+\dfrac{2x_0+2}{x_0-1} \end{cases}\Rightarrow A\left(1;\dfrac{2x_0+6}{x_0-1}\right)$

Tiếp tuyến cắt tiệm ngang tại

$B:\begin{cases} y=2 \\ 2=\dfrac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0+2}{x_0-1} \end{cases}\Rightarrow B(2x_0-1;2)$

Suy ra: $IA=\dfrac{8}{|x_0-1|};\ IB=2|x_0-1|\Rightarrow IA.IB=16$

Chu vi tam giác IAB: $P=IA+IB+AB=IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}$

Mà $IA+IB\ge 2\sqrt{IA.IB}=8;\ IA^2+IB^2\ge 2IA.IB=32$

Nên $P\ge 8+\sqrt{32}=8+4\sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow IA=IB\Leftrightarrow (x_0-1)^2=4\Leftrightarrow x_0=3, x_0=-1$

Vậy ta có hai tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán: $\Delta: y=-x-1$ và $\Delta: y=-x+7$.

Bài 13 Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x+2}$ có đồ thị (C).

Câu 1. Trên đồ thị (C) tồn tại bao nhiêu điểm mà tiếp tuyến của (C) tại đó song song với đường thẳng $y=4x+3$.

A. 1 **B.**2 **C.**3 **D.** 4

✍***Bài làm* 1**. Hàm số xác định với mọi $x\ne -2$.

Ta có: $y'=\dfrac{4}{(x+2)^2}$

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$. Tiếp tuyến Δ của (C) tại M có phương trình

$y=\dfrac{4}{(x_0+2)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0}{x_0+2}=\dfrac{4}{(x_0+2)^2}x+\dfrac{2x_0^2}{(x_0+2)^2}$

Tiếp tuyến Δ song song với đường thẳng $y=4x+3$ khi và chỉ khi

$\begin{cases} \dfrac{4}{(x_0+2)^2}=4 \\ \dfrac{2x_0^2}{(x_0+2)^2}\ne 3 \end{cases}\Leftrightarrow x_0=-1; x_0=-3.$

Vậy trên (C) có hai điểm thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{1}{18}$.

A. $\Delta: y=\dfrac{9}{4}x+\dfrac{1}{2}; \Delta: y=\dfrac{4}{9}x+\dfrac{1}{9}$ **B.** $\Delta: y=\dfrac{9}{4}x+\dfrac{31}{2}; \Delta: y=\dfrac{4}{9}x+\dfrac{2}{9}$

C. $\Delta: y=\frac{9}{4}x+\frac{1}{2}; \Delta: y=\frac{4}{9}x+\frac{4}{9}$ **D.** $\Delta: y=\frac{9}{4}x+\frac{1}{2}; \Delta: y=\frac{4}{9}x+\frac{2}{9}$

***Bài làm* 2**. Hàm số xác định với mọi $x\neq -2$.

Ta có: $y'=\frac{4}{(x+2)^2}$

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$. Tiếp tuyến Δ của (C) tại M có phương trình

$$y=\frac{4}{(x_0+2)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0}{x_0+2}=\frac{4}{(x_0+2)^2}x+\frac{2x_0^2}{(x_0+2)^2}$$

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến Δ với Ox, Oy

Suy ra $A:\begin{cases} y=0 \\ \frac{4}{(x_0+2)^2}x+\frac{2x_0^2}{(x_0+2)^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2}x_0^2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow A(-\frac{1}{2}x_0^2;0)$

$B:\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{2x_0^2}{(x_0+2)^2} \end{cases} \Rightarrow B\left(0;\frac{2x_0^2}{(x_0+2)^2}\right)$

Vì $A,B\neq O\Rightarrow x_0\neq 0$.

Tam giác AOB vuông tại O nên $S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}\frac{x_0^4}{(x_0+2)^2}$

Suy ra $S_{\Delta AOB}=\frac{1}{18}\Leftrightarrow \frac{x_0^4}{(x_0+2)^2}=9\Leftrightarrow 9x_0^4=(x_0+2)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x_0^2+x_0+2=0 \text{ (vn)} \\ 3x_0^2-x_0-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=-\frac{2}{3} \end{array}\right.$.

* $x_0=1\Rightarrow y_0=\frac{2}{3}$, $y'(x_0)=\frac{4}{9}$. Phương trình $\Delta: y=\frac{4}{9}x+\frac{2}{9}$

* $x_0=-\frac{2}{3}\Rightarrow y_0=-1$, $y'(x_0)=\frac{9}{4}$

Phương trình $\Delta: y=\frac{9}{4}(x+\frac{2}{3})-1=\frac{9}{4}x+\frac{1}{2}$.

Câu 3. Giả sử tồn tại phương trình tiếp tuyến của (C), biết khoảng cách từ tâm đối xứng đến tiếp tuyến lớn nhất., thì hoành độ tiếp điểm lúc này là:

A. $x_0=0, x_0=-4$ **B.** $x_0=0, x_0=-3$ **C.** $x_0=1, x_0=-4$ **D.** $x_0=1, x_0=-3$

***Bài làm* 3**. Hàm số xác định với mọi $x\neq -2$.

Ta có: $y'=\frac{4}{(x+2)^2}$

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$. Tiếp tuyến Δ của (C) tại M có phương trình

$y=\frac{4}{(x_0+2)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0}{x_0+2}=\frac{4}{(x_0+2)^2}x+\frac{2x_0^2}{(x_0+2)^2}$

Ta có tâm đối xứng $I(-2;2)$

Khoảng cách từ I đến tiếp tuyến $\Delta: \frac{4}{(x_0+2)^2}x-y+\frac{2x_0^2}{(x_0+2)^2}=0$:

$d=\frac{8|x_0+2|}{\sqrt{(x_0+2)^4+16}}=8\sqrt{\frac{t}{t^2+16}}$, với $t=(x_0+2)^2\geq 0$

Do $\frac{t}{t^2+16}\leq\frac{t}{2\sqrt{16t^2}}=\frac{1}{16}\Rightarrow d\leq 2$

Đẳng thức xảy ra khi $t^2=16\Leftrightarrow t=4\Leftrightarrow (x_0+2)^2=4\Leftrightarrow x_0=0, x_0=-4$.

Bài 14: Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$, $c<0$ có đồ thị (C) cắt Oy ở A và có đúng hai điểm chung với trục Ox là M và N. Tiếp tuyến với đồ thị tại M đi qua A. Tìm $a;b;c$ để $S_{AMN}=1$.

A. $a=4,b=5,c=-2$ **B.** $a=4,b=5,c=2$ **C.** $a=-4,b=6,c=-2$ **D.** $a=-4,b=5,c=-2$

✍***Bài làm*** Giả sử (C) cắt Ox tại $M(m;0)$ và $N(n;0)$ cắt Oy tại $A(0;c)$

Tiếp tuyến tại M có phương trình:

$$y=(3m^2+2am+b)(x-m).$$

Tiếp tuyến đi qua A nên ta có: $3m^3+2am^2+bm+c=0$

$\Leftrightarrow 2m^3+am^2=0\Leftrightarrow m=-\frac{a}{2}$ (do $m^3+am^2+bm+c=0$)

Mà (C) cắt Ox tại hai điểm nên (C) tiếp xúc với Ox.

Nếu M là tiếp điểm thì suy ra Ox đi qua A vô lí nên ta có (C) tiếp xúc với Ox tại N. Do đó: $y=x^3+ax^2+bx+c=(x-n)^2(x-m)$

Suy ra $\begin{cases} m+2n=-a \\ 2mn+n^2=b \\ mn^2=-c \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m=-\frac{a}{2}, n=-\frac{a}{4} \\ a^3=32c \\ 5a^2=16b \end{cases}$ (1).

Mặt khác $S_{\Delta AMN}=1\Leftrightarrow -c|n-m|=2\Leftrightarrow -c|a|=8$

- $a>0$ ta có: $\begin{cases} a^3=32c \\ ac=-8 \\ 5a^2=16b \end{cases}$ vô nghiệm.
- $a<0$ ta có: $\begin{cases} a^3=32c \\ ac=8 \\ 5a^2=16b \end{cases}\Leftrightarrow a=-4, b=5, c=-2$

Bài 15: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C).

Câu 1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng $-\dfrac{1}{4}$.

A. $:y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}$ và $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}$.

B. $:y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{2}$ và $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{2}$.

C. $:y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{4}$ và $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

D. $:y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}$ và $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

✍***Bài làm* 1. :** Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến Δ tại M

$y=\dfrac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0-1}{x_0-1}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\dfrac{1}{4}$ nên suy ra

$-\dfrac{1}{(x_0-1)^2}=-\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x_0=3,x_0=-1$.

Từ đó ta tìm được tiếp tuyến là: $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}$ và $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

Câu 2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với hai tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

A. $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}$ và $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

B. $y=-\dfrac{1}{4}x+3$ và $y=-\dfrac{1}{4}x+1$.

C. $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}$ và $y=-\dfrac{1}{4}x+1$.

D. $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}$ và $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

✍***Bài làm* 2. :** Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến Δ tại M

$y=\dfrac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0-1}{x_0-1}$.

Tiếp tuyến Δ cắt tiệm cận đứng tại $A(1;\dfrac{2x_0}{x_0-1})$, cắt đường tiệm cận ngang tại $B(2x_0-1;2)$. Tâm đối xứng $I(1;2)$

Suy ra $IA=\dfrac{2}{|x_0-1|}, IB=2|x_0-1|\Rightarrow IA.IB=4$

Chu vi tam giác IAB : $p=AB+IA+IB=\sqrt{IA^2+IB^2}+IA+IB$

Mặt khác: $IA^2+IB^2\ge 2IA.IB=8;\ IA+IB\ge 2\sqrt{IA.IB}=4$

Nên $p\ge 2\sqrt{2}+4$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow IA=IB$

$\Leftrightarrow (x_0-1)^2=4\Leftrightarrow x_0=3,x_0=-1$.

Từ đó ta tìm được tiếp tuyến là: $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}$ và $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

Câu 3. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết khoảng cách từ tâm đối xứng I đến tiếp tuyến tạo lớn nhất.

A. $y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$ và $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$. **B.** $y=-\frac{1}{4}x+1$ và $y=-\frac{1}{4}x+5$.

C. $y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}$ và $y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$. **D.** $y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}$ và $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$.

✍***Bài làm* 3. :** Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến Δ tại M

$$y=\frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0-1}.$$

Gọi H là hình chiếu của I lên Δ. Ta có $d(I,\Delta)=IH$

Trong tam giác vuông IAB ta có: $\frac{1}{IH^2}=\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IB^2}\geq\frac{2}{IA.IB}=\frac{1}{2}$

Suy ra $IH\leq\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow IA=IB$.

Từ đó ta tìm được tiếp tuyến là: $y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}$ và $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$.

Câu 4. Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với IM.

A. $y=-x+1, y=-x+4$ **B.** $y=-x+3, y=-x+5$ **C.** $y=-x+1, y=-x+3$ **D.** $y=-x+1, y=-x+5$

✍***Bài làm* 4. :** Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến Δ tại M

$$y=\frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0-1}.$$

Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u}=\left(1;\frac{-1}{(x_0-1)^2}\right)$, $\overrightarrow{IM}=(x_0-1;\frac{1}{x_0-1})$.

$$IM\perp\Delta\Leftrightarrow x_0-1-\frac{1}{(x_0-1)^3}=0\Leftrightarrow x_0=0, x_0=2.$$

Từ đó ta tìm được tiếp tuyến: $y=-x+1, y=-x+5$.

Bài 16:

Câu 1. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=x^4-1$ và (d) là một tiếp tuyến của (C), (d) cắt hai trục tọa độ tại A và B. Viết phương trình tiếp tuyến (d) khi tam giác OAB có diện tích nhỏ nhất (O là gốc tọa độ).

A. $y=\pm\frac{4}{\sqrt[4]{15}}x-\frac{8}{5}$ **B.** $y=\pm\frac{4}{\sqrt[4]{12}}x-\frac{8}{5}$ **C.** $y=\pm\frac{4}{\sqrt[4]{5}}x-\frac{7}{5}$ **D.** $y=\pm\frac{4}{\sqrt[4]{125}}x-\frac{8}{5}$

✍***Bài làm* 1.** Phương trình tiếp tuyến (d) có dạng : $y=4x_0^3(x-x_0)+x_0^4-1=4x_0^3x-3x_0^4-1$ trong đó x_0 là hoành độ tiếp điểm của (d) với (C).

A là giao điểm của (d) với trục Ox $\Rightarrow A\left(\frac{3x_0^4+1}{4x_0^3};0\right)$

B là giao điểm của (C) với trục Oy $\Rightarrow B(0;-3x_0^4-1)$.

Diện tích của tam giác vuông OAB:

$$S = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}|x_A||y_B| = \frac{1}{2}\left|\frac{(3x_0^4+1)^2}{4x_0^3}\right| = \frac{1}{8}\frac{(3x_0^4+1)^2}{|x_0|^3}$$

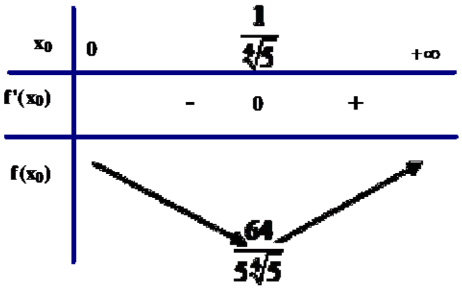
Xét trường hợp $x_0 > 0$,khi đó $S = \frac{1}{8}.\frac{(3x_0^4+1)^2}{x_0^3}$.

Xét hàm số $f(x_0) = \frac{(3x_0^4+1)^2}{x_0^3}$, $x_0 \in (0;+\infty)$.

$$f'(x_0) = \frac{2(3x_0^4+1)12x_0^3.x_0^3 - (3x_0^4+1)^2.3x_0^2}{x_0^6} = \frac{3(3x_0^4+1)(5x_0^4-1)}{x_0^4}.$$

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0^4 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \ (do\ x_0 > 0)$$

Bảng biến thiên của $f(x_0)$



Từ bảng biến thiên suy ra $\min f(x_0) = \frac{64}{5\sqrt[4]{5}}$ đạt được khi và chỉ khi $x_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$

Suy ra $\min S = \frac{8}{5\sqrt[4]{5}} \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$.

Khi đó phương trình của (d) là $y = \frac{4}{\sqrt[4]{125}}x - \frac{8}{5}$.

Vì trục Oy là trục đối xứng của (C) nên trong trường hợp $x_0 < 0$, phương trình của (d) là $y = -\frac{4}{\sqrt[4]{125}}x - \frac{8}{5}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = \pm\frac{4}{\sqrt[4]{125}}x - \frac{8}{5}$.

Câu 2. Gọi (Cm) là đồ thị của hàm số $y = x^4 - 3(m+1).x^2 + 3m + 2$, m là tham số

Tìm các giá trị ***dương*** của tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt và tiếp tuyến của (C_m) tại giao điểm có hoành độ lớn nhất hợp với hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 24.

A. $m = 1$ **B.** $m = \frac{1}{3}$ **C.** $m = \frac{2}{3}$ **D.** $m = 7$

✍***Bài làm 2.*** Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành là

$x^4 - 3(m+1).x^2 + 3m + 2 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2, t \geq 0$. Phương trình (1) trở thành : $t^2 - 3(m+1).t + 3m + 2 = 0$ (2)

(C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt .

Vì (2) luôn có hai nghiệm là $t = 1,\ t = 3m + 2$ với mọi m và vì $m > 0$ (giả thiết) nên ta có $1 < 3m + 2$,suy ra với mọi tham số $m > 0$, (C_m) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt và nếu gọi A là giao điểm có hoành độ lớn nhất thì hoành độ A là $x_A = \sqrt{3m+2}$.

Gọi $f(x) = x^4 - 3(m+1).x^2 + 3m + 2$, phương trình tiếp tuyến d của (C_m) tại A là

$y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A) = [4x_A^3 - 6(m+1)x_A](x - x_A)$ (vì $f(x_A) = 0$)

$= [4(3m+2)\sqrt{3m+2} - 6(m+1)\sqrt{3m+2}](x - \sqrt{3m+2})$

$= (6m+2)\sqrt{3m+2}\left(x - \sqrt{3m+2}\right)$

Gọi B là giao điểm của tiếp tuyến d với trục Oy thì $B\left(0\,; (6m+2)(3m+2)\right)$. Tam giác mà tiếp tuyến d tạo với hai trục toạ độ là tam giác vuông OAB (vuông tạiO) ,theo giả thiết ta có :

$S_{OAB} = 24 \Leftrightarrow OA.OB = 48 \Leftrightarrow |x_A||y_B| = 48$

$\Leftrightarrow \sqrt{3m+2}(6m+2)(3m+2) = 48$ (3).

Gọi $f(m) = \sqrt{3m+2}(6m+2)(3m+2) = \sqrt{3m+2}(18m^2 + 22m + 4)$

$f'(m) = \dfrac{3}{2\sqrt{3m+2}}(18m^2 + 22m + 4) + (36m + 22)\sqrt{3m+2} > 0$ với mọi m >0.

Suy ra hàm số f(m) đồng biến trên $(0;+\infty)$ và vì $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = 24$, do đó phương trình (3) chỉ có một nghiệm là $m = \dfrac{2}{3}$ trên $(0;+\infty)$

Bài 18:

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x+2}$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), để khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến tiếp tuyến là lớn nhất.

A. $y = 2x$ và $y = x + 8$. **B.** $y = x$ và $y = x + 9$. **C.** $y = 3x$ và $y = x + 8$. **D.** $y = x$ và $y = x + 8$.

✍***Bài làm* 1.** Tiếp tuyến (d) của đồ thị (C) tại điểm M có hoành độ $a \neq -2$ thuộc (C) có phương trình:

$y = \dfrac{4}{(a+2)^2}(x - a) + \dfrac{2a}{a+2} \Leftrightarrow 4x - (a+2)^2 y + 2a^2 = 0$

Tâm đối xứng của (C) là $I(-2;2)$.

$d(I,d) = \dfrac{8|a+2|}{\sqrt{16 + (a+2)^4}} \leq \dfrac{8|a+2|}{\sqrt{2.4.(a+2)^2}} = \dfrac{8|a+2|}{2\sqrt{2}|a+2|} = 2\sqrt{2}$

$d(I,d)$ lớn nhất khi $(a+2)^2 = 4 \Leftrightarrow a = -4$ hoặc $a = 0$.

Từ đó suy ra có hai tiếp tuyến $y = x$ và $y = x + 8$.

Câu 2. Cho hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Tìm trên (C) những điểm M sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A,B sao cho AB ngắn nhất.

A. $M(3;3)$ hoặc $M(-1;\frac{5}{3})$ **B.** $M(-1;\frac{5}{3})$ hoặc $M(1;1)$

C. $M(4;\frac{5}{2})$ hoặc $M(-1;\frac{5}{3})$ **D.** $M(3;3)$ hoặc $M(1;1)$

✍***Bài làm* 2.** Lấy điểm $M\left(m;\ 2+\frac{1}{m-2}\right)\in(C)$. Ta có: $y'(m)=-\frac{1}{(m-2)^2}$

Tiếp tuyến (d) tại M có phương trình: $y=-\frac{1}{(m-2)^2}(x-m)+2+\frac{1}{m-2}$

Giao điểm của (d) với tiệm cận đứng là: $A\left(2;2+\frac{2}{m-2}\right)$

Giao điểm của (d) với tiệm cận ngang là: $B(2m-2;2)$

Ta có: $AB^2=4\left[(m-2)^2+\frac{1}{(m-2)^2}\right]\geq 8$. Đẳng thức xảy ra khi $m=1$ hoặc $m=3$.

Vậy, điểm M cần tìm có tọa độ là: $M(3;3)$ hoặc $M(1;1)$

Bài 19 : Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị $y=x^3-mx+m-1$ tại điểm M có hoành độ $x=-1$ cắt đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ theo một dây cung có độ dài nhỏ nhất.

A. $m=3$ **B.** $m=6$ **C.** $m=8$ **D.** $m=2$

✍***Bài làm*** **:** Ta có: $y'=3x^2-m\Rightarrow y'(-1)=3-m$; $y(-1)=2m-2$. (C) có tâm $I(2;3)$, R = 2.

Phương trình đường thẳng d tại $M(-1;2m-2)$: $y=(3-m)x+m+1$

$\Leftrightarrow (3-m)x-y+m+1=0$

$$d(I,d)=\frac{|4-m|}{\sqrt{(3-m)^2+1}}=\frac{|1+(3-m)|}{\sqrt{(3-m)^2+1}}\leq\frac{\sqrt{2}.\sqrt{(3-m)^2+1}}{\sqrt{(3-m)^2+1}}=\sqrt{2}<R$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=2$. Do đó $d(I,d)$ đạt lớn nhất $\Leftrightarrow m=2$

Tiếp tuyến d cắt (C) tại 2 điểm A, B sao cho AB ngắn nhất $\Leftrightarrow d(I,d)$ đạt lớn nhất $\Leftrightarrow m=2$, suy ra d: $y=x+3$.

NGUYỄN BẢO VƯƠNG

CHƯƠNG V. ĐẠO HÀM

TẬP 2C. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN ĐI QUA ĐIỂM CHO TRƯỚC

MỤC LỤC

Vấn đề 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số khi tiếp tuyến đi qua điểm cho trước.

Phương pháp:

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ đi qua điểm $M(x_1; y_1)$

Cách 1 :

- Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm M có hệ số góc là k có dạng : $y = k(x - x_1) + y_1$.
- (d) tiếp xúc với đồ thị (C) tại $N(x_0; y_0)$ khi hệ: $\begin{cases} f(x_0) = k(x_0 - x_1) + y_1 \\ f'(x_0) = k \end{cases}$ có nghiệm x_0.

Cách 2 :

- Gọi $N(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của đồ thị (C) và tiếp tuyến (d) qua điểm M, nên (d) cũng có dạng $y = y'_0(x - x_0) + y_0$.
- (d) đi qua điểm M nên có phương trình : $y_1 = y'_0(x_1 - x_0) + y_0$ $(*)$
- Từ phương trình $(*)$ ta tìm được tọa độ điểm $N(x_0; y_0)$, từ đây ta tìm được phương trình đường thẳng (d).

Các ví dụ

Ví dụ 1 :

1. Viết phương trình tiếp tuyến d với đồ thị $(C): y = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{4} - x$, biết d song song đường thẳng $x + y - 8 = 0$.

2. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$ có đồ thị là (C). Tìm phương trình các đường thẳng đi qua điểm $A\left(\frac{19}{12}; 4\right)$ và tiếp xúc với đồ thị (C) của hàm số.

Lời giải.

1. Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Cách 1: Tiếp tuyến d song song với đường thẳng $x + y - 8 = 0$ nên d có dạng $y = -x + b$.

d tiếp xúc với (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases} \frac{x_0^3}{3} + \frac{3x_0^2}{4} - x_0 = -x_0 + b & (1) \\ x_0^2 + \frac{3x_0}{2} - 1 = -1 & (2) \end{cases}$ có nghiệm x_0.

Phương trình $(2) \Leftrightarrow 2x_0^2 + 3x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ hoặc $x_0 = -\frac{3}{2}$.

Với $x_0 = 0$ thay vào phương trình (1), ta được $b = 0$ khi đó $d: y = -x$.

Với $x_0 = -\frac{3}{2}$ thay vào phương trình (1), ta được $b = \frac{9}{16}$ khi đó $d: y = -x + \frac{9}{16}$.

Cách 2: Gọi $(x_0; y(x_0))$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến d và (C), với

$y(x_0) = \frac{x_0^3}{3} + \frac{3x_0^2}{4} - x_0$, tiếp tuyến d có hệ số góc $y'(x_0) = x_0^2 + \frac{3x_0}{2} - 1$

$d \,||\, x+y-8=0 \Rightarrow y'(x_0)=-1$ tức $x_0^2+\frac{3x_0}{2}-1=-1$ hay nghiệm $x_0=0$ hoặc $x_0=-\frac{3}{2}$. Phần còn lại giành cho bạn đọc.

2. Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=6x^2-6x$

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)\Leftrightarrow y_0=2x_0^3-3x_0^2+5$ và $y'(x_0)=6x_0^2-6x_0$

Phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại M có dạng: $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$

$\Leftrightarrow y-(2x_0^3-3x_0^2+5)=(6x_0^2-6x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=(6x_0^2-6x_0)x-4x_0^3+3x_0^2+5$

$A\in\Delta\Leftrightarrow 4=(6x_0^2-6x_0).\frac{19}{12}-4x_0^3+3x_0^2+5\Leftrightarrow 8x_0^3-25x_0^2+19x_0-2=0\Leftrightarrow x_0=1$ hoặc $x_0=2$ hoặc $x_0=\frac{1}{8}$

Với $x_0=1\Rightarrow\Delta: y=4$

Với $x_0=2\Rightarrow\Delta: y=12x-15$

Với $x_0=\frac{1}{8}\Rightarrow\Delta: y=-\frac{21}{32}x+\frac{645}{128}$

Ví dụ 2 :

1. Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $M\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

2. Cho hàm số: $y=\frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C) và điểm $A(0;m)$. Xác định m để từ A kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm tương ứng nằm về hai phía đối với trục Ox .

Lời giải.

1. Đường thẳng $x=0$ đi qua điểm $M\left(0;\frac{3}{2}\right)$ không phải là tiếp tuyến của đồ thị (C).

d là đường thẳng đi qua điểm $M\left(0;\frac{3}{2}\right)$ có hệ số góc k có phương trình $y=kx+\frac{3}{2}$

Đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị (C) tai điểm có hoành độ là x_0 thì x_0 là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases}\frac{1}{2}x_0^4-3x_0^2+\frac{3}{2}=kx_0+\frac{3}{2} & (1)\\ 2x_0^3-6x_0=k & (2)\end{cases}$$

Thay (2) vào (1) rồi rút gọn ta được $x_0^2(x_0^2-2)=0\Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $x_0=\pm\sqrt{2}$

Khi $x_0=0$ thì $k=0$ lúc đó phương trình tiếp tuyến là $y=\frac{3}{2}$

Khi $x_0=-\sqrt{2}$ thì $k=2\sqrt{2}$ lúc đó phương trình tiếp tuyến là $y=2\sqrt{2}x+\frac{3}{2}$

Khi $x_0=\sqrt{2}$ thì $k=-2\sqrt{2}$ lúc đó phương trình tiếp tuyến là $y=-2\sqrt{2}x+\frac{3}{2}$

Vậy, có ba tiếp tuyến là $y=\frac{3}{2}$, $y=2\sqrt{2}x+\frac{3}{2}$, $y=-2\sqrt{2}x+\frac{3}{2}$

2. Cách 1: Gọi điểm $\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \le 1$. Tiếp tuyến Δ tại M của (C) có phương trình :

$m(x_0-1)^2 = 3x_0 + (x_0+2)(x_0-1) = 0$ (với $x_0 \ne 1$) $\Leftrightarrow (m-1)x_0^2 - 2(m+2)x_0 + m + 2 = 0 \quad (*)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm a,b khác 1 sao cho

$\frac{(a+2)(b+2)}{(a-1)(b-1)} = \frac{ab+2(a+b)+4}{ab-(a+b)+1} < 0$ hay là: $\begin{cases} m \ne 1 \\ m > -\frac{2}{3} \end{cases}$.

Vậy $-\frac{2}{3} < m \ne 1$ là những giá trị cần tìm.

Cách 2: Đường thẳng d đi qua A, hệ số góc k có phương trình: $y = kx + m$.

d tiếp xúc với (C) tại điểm có hoành độ x_0 $\Leftrightarrow$ hệ $\begin{cases} \frac{x_0+2}{x_0-1} = kx_0 + m \\ \frac{-3}{(x_0-1)^2} = k \end{cases}$ có nghiệm x_0.

Thế k vào phương trình thứ nhất, ta đươc:

$\frac{x_0+2}{x_0-1} = \frac{-3x}{(x_0-1)^2} + m \Leftrightarrow (m-1)x_0^2 - 2(m+2)x_0 + m + 2 = 0 \quad (*)$

Để từ A kẻ được hai tiếp tuyến thì $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 3(m+2) > 0 \\ m \ne 1 \\ m-1-2(m+2)+m+2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m \ne 1 \end{cases} \quad (i)$

Khi đó tọa độ hai tiếp điểm là: $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ với x_1, x_2 là nghiệm của $(*)$ và $y_1 = \frac{x_1+2}{x_1-1}$; $y_2 = \frac{x_2+2}{x_2-1}$

Để M_1, M_2 nằm về hai phía Ox thì $y_1.y_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1} < 0 \quad (1)$

Áp dụng định lí Viet: $x_1 + x_2 = \frac{2(m+2)}{m-1}$; $x_1x_2 = \frac{m+2}{m-1}$.

$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \frac{9m+6}{-3} < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{2}{3}$.

Kết hợp với (i) ta được $-\frac{2}{3} < m \ne 1$ là những giá trị cần tìm.

Ví dụ 3 :

1. Tìm tất cả các điểm trên đường thẳng $d: \ y = \frac{5x}{4} + \frac{61}{24}$ để từ đó kẻ đến đồ thị $y = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{7}{3}$ có 3 tiếp tuyến tương ứng với 3 tiếp điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn: $x_1 < x_2 < 0 < x_3$

2. Tìm tất cả các giá trị của k để tồn tại 2 tiếp tuyến với (C): $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$ phân biệt và có cùng hệ số góc k, đồng thời đường thẳng đi qua các tiếp điểm của 2 tiếp tuyến đó với (C) cắt các trục Ox, Oy tương ứng tại A, B sao cho $OB = 2012.OA$.

Lời giải.

1. $M\left(m;\frac{5m}{4}+\frac{61}{24}\right)\in d$, tiếp tuyến (t) tại điểm $N(x_0;y_0)$ đi qua M: $\frac{2}{3}x_0^{\ 3}+\left(\frac{1}{2}-m\right)x_0^{\ 2}-mx_0+\frac{3m}{4}-\frac{5}{24}=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_0=\frac{1}{2}>0 \\ \frac{2}{3}x_0^{\ 2}+\left(\frac{5}{6}-m\right)x_0+\frac{5}{12}-\frac{3m}{2}=0\ (*) \end{array}\right.$$

Theo bài toán, phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt âm, tức là : $\begin{cases} m^2+\frac{7m}{3}-\frac{5}{12}>0 \\ \frac{5}{18}-m>0 \\ \frac{3}{2}m-\frac{5}{4}<0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m<-\frac{5}{2};\ \ m>\frac{1}{6} \\ m<\frac{5}{18} \\ m<\frac{5}{6} \end{cases}$

Vậy, những điểm M thỏa bài toán là: $x_M<-\frac{5}{2}$ hoặc $\frac{1}{6}<x_M<\frac{5}{18}$

2. Hoành độ tiếp điểm x_0 của tiếp tuyến dạng $y=kx+m$ với (C) là nghiệm của phương trình

$f'(x_0)=k\Leftrightarrow 3x_0^2+12x_0+9-k=0\ (1)$

Để tồn tại 2 tiếp tuyến với (C) phân biệt nhau thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, khi đó

$\Delta'=9+3k>0$ hay $k>-3\ (2)$.

Khi đó tọa độ tiếp điểm $(x_0;y_0)$ của 2 tiếp tuyến với (C) là nghiệm hệ phương trình: $\begin{cases} y_0=x_0^3+6x_0^2+9x_0+3 \\ 3x_0^2+12x_0+9=k \end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y_0=\frac{1}{3}(x_0+2)(3x_0^2+12x_0+9)-2x_0-3 \\ 3x_0^2+12x_0+9=k \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y_0=\frac{1}{3}(x_0+2)k-2x_0-3=\frac{k-6}{3}x_0+\frac{2k-9}{3} \\ 3x_0^2+12x_0+9=k \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua các tiếp điểm là (d): $y=\frac{k-6}{3}x+\frac{2k-9}{3}$.

Do (d) cắt trục Ox,Oy tương ứng tại A và B sao cho $OB=2012.OA$ nên có thể xảy ra:

- Nếu $A\equiv O$ thì $B\equiv O$, trường hợp này chỉ thỏa nếu (d) cũng qua O. Khi đó $k=\frac{9}{2}$.
- Nếu $A\neq O$, khi đó trong tam giác AOB vuông tại O sao cho $\tan OAB=\frac{OB}{OA}=2012\Rightarrow\frac{k-6}{3}=\pm 2012\Rightarrow k=6042$ hoặc $k=-6030$ (không thỏa (2)).

Vậy $k=\frac{9}{2}$, $k=6042$ thỏa bài toán.

Ví dụ 4 : Cho hàm số $y=-x^3+3x-2$, có đồ thị là (C). Tìm tọa độ các điểm trên đường thẳng $y=-4$ mà từ đó có thể kẻ đến đồ thị (C) đúng hai tiếp tuyến.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Gọi A là điểm nằm trên đường thẳng $y=-4$ nên $A(a;-4)$.

Đường thẳng Δ qua A với hệ số góc k có phương trình $y=k(x-a)-4$

Đường thẳng Δ tiếp xúc với đồ thị (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} -x^3+3x-2=k(x-a)-4 \\ -3x^2+3=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3x-2=3(x^2-1)(x-a) \\ -3x^2+3=k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)\left[2x^2-(3a+2)x+3a+2\right]=0\ (1) \\ -3x^2+3=k\ (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) tương đương với: $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ g(x)=2x^2-(3a+2)x+3a+2=0 \end{array}\right.$

Qua A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) khi và chỉ khi (2) có 2 giá trị k khác nhau , khi đó (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2, đồng thời thỏa $k_1=-3x_1^2+3,\ k_2=-3x_2^2+3$ có 2 giá trị k khác nhau

Trường hợp 1:

$g(x)$ phải thỏa mãn có một nghiệm bằng -1 và nghiệm khác -1 hay

$$\begin{cases} g(-1)=0 \\ -\dfrac{3a+2}{2}\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a+6=0 \\ a\neq 0 \end{cases} \Rightarrow a=-1 \text{ kiểm tra } (2) \text{ thấy thỏa.}$$

Trường hợp 2:

$g(x)$ phải thỏa mãn có một nghiệm kép khác -1 hay $\begin{cases} (3a+2)^2-8(3a+2)=0 \\ \dfrac{3a+2}{2}\neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(3a+2)(a-2)=0 \\ 3a+2\neq -2 \end{cases}$

$\Rightarrow a=-\dfrac{2}{3}$ hoặc $a=2,$ kiểm tra (2) thấy thỏa.

Vậy, các điểm cần tìm là $A(-1;-4)$, $A(2;-4)$ hoặc $A\left(-\dfrac{2}{3};-4\right)$.

Ví dụ 5 Cho hàm số $y=3x-x^3$ có đồ thị là (C). Tìm trên đường thẳng (d): $y=-x$ các điểm M mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến phân biệt với đồ thị (C).

Lời giải.

Gọi $M(m;-m)\in d$.

Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc k có dạng: $y=k(x-m)-m$.

Δ là tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ sau có nghiệm x_0:

$$\begin{cases} 3x_0-x_0^3=k(x_0-m)-m & (1) \\ 3-3x_0^2=k & (2) \end{cases} \quad (*)$$

Thay (2) vào (1) ta được: $2x_0^3-3mx_0^2+4m=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{2x_0^3}{3x_0^2-4}$ (**)

Từ M kẻ được đúng 2 tiếp tuyến với (C) $\Leftrightarrow$(*) có nghiệm x_0 đồng thời (2) tồn tại đúng 2 giá trị k khác nhau

Khi đó (**) có nghiệm x_0 phân biệt thỏa mãn (2) có 2 giá trị k khác nhau .

Xét hàm số $f(x_0)=\dfrac{2x_0^3}{3x_0^2-4}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm1;\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$

Ta có: $f'(x_0)=\frac{6x_0^4-24x_0^2}{(3x_0^2-4)^2}$ và $f'(x_0)=0\Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $x_0=\pm2$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\Leftrightarrow m=\pm2$. Kiểm tra (2), ta thấy thỏa mãn.

Vậy: $M(-2;2)$ hoặc $M(2;-2)$.

Ví dụ 6 Lấy điểm M thuộc đồ thị $(C): y=-2x^3-3x^2+3$. Chứng minh rằng có nhiều nhất hai đường thẳng đi qua điểm M và tiếp xúc với (C)

Lời giải.

Gọi $M(a;-2a^3-3a^2+3)$ là điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số. Đường thẳng (d) đi qua M có hệ số góc k, có phương trình:

$y=k(x-a)-2a^3-3a^2+3$.

Đường thẳng (d) tiếp xúc với đồ thị (C) tại $N(x_0;y_0)$ khi hệ phương trình: $\begin{cases}-2x_0^3-3x_0^2+3=k(x_0-a)-2a^3-3a^2+3 & (1)\\ -6x_0^2-6x_0=k & (2)\end{cases}$ có nghiệm x_0. Thay (2) vào (1), biến đổi và rút gọn ta được phương trình :

$(x_0-a)^2(4x_0+2a+3)=0$ tức $x_0=a$ hoặc $x_0=\frac{-2a-3}{4}$.

Vậy hệ phương trình (1), (2) có nhiều nhất 2 nghiệm, tức có nhiều nhất 2 đường thẳng đi qua M và tiếp xúc với đồ thị (C).

Ví dụ 7: Cho hàm số $y=-2x^3+4x^2+1$, có đồ thị là (C)

1. Gọi d là đường thẳng đi qua $A(0;1)$ có hệ số góc là k. Tìm k để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt B,C khác A sao cho B nằm giữa A và C đồng thời $AC=3AB$;

2. Tìm trên trục tung những điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến (C)

Lời giải.

1. $d: y=kx+1$. Với $k<2$ thì (d) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt B và C khác A. Khi đó $B(x_B;kx_B+1)$, $C(x_C;kx_C+1)$, $x_B<x_C$ với x_B,x_C là nghiệm của phương trình $2x^2-4x+k=0$.

$AC=3AB$ tức $x_C=3x_B$ và $x_B+x_C=2,\ x_B.x_C=\frac{k}{2}$ suy ra $k=\frac{3}{2}$.

2. Gọi $M(0;m)$ và (t) qua M có hệ số góc là a nên (t): $y=ax+m$. (t) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases}-2x_0^3+4x_0^2+1=kx_0+m\\ -6x_0^2+8x_0=x_0\end{cases}$ có nghiệm x_0 suy ra $4x_0^3-4x_0^2+1-m=0$ có nghiệm x_0 $(*)$. Theo bài toán thì phương trình $(*)$ có đúng 2 nghiệm, từ đó có được $m=\frac{11}{27}$ hoặc $m=1$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$ có đồ thị là (C). Tìm phương trình các đường thẳng đi qua điểm $A\left(\frac{4}{9};\frac{4}{3}\right)$ và tiếp xúc với đồ thị (C) của hàm số.

A. $\left[\begin{array}{l}\Delta: y=x\\ \Delta: y=\frac{4}{3}x\\ \Delta: y=-\frac{5}{9}x+\frac{8}{81}\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}\Delta: y=3x\\ \Delta: y=\frac{4}{3}x+1\\ \Delta: y=-\frac{5}{9}x+\frac{128}{81}\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}\Delta: y=x\\ \Delta: y=\frac{4}{3}\\ \Delta: y=-\frac{5}{9}x+\frac{1}{81}\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}\Delta: y=3x\\ \Delta: y=\frac{4}{3}\\ \Delta: y=-\frac{5}{9}x+\frac{128}{81}\end{array}\right.$

✍***Bài làm:*** Phương trình đường thẳng Δ đi qua A với hệ số góc k có dạng: $y=k\left(x-\frac{4}{9}\right)+\frac{4}{3}$

Δ tiếp xúc với (C) tại điểm có hoành độ x khi hệ phương trình $\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x=k\left(x-\frac{4}{9}\right)+\frac{4}{3} & (1)\\ x^2-4x+3=k & (2)\end{cases}$ có nghiệm x

Thế (2) vào (1), được: $\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x=(x^2-4x+3)\left(x-\frac{4}{9}\right)+\frac{4}{3}\Leftrightarrow x(3x^2-11x+8)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\overset{(2)}{\Rightarrow}k=3\Rightarrow\Delta: y=3x\\ x=1\overset{(2)}{\Rightarrow}k=0\Rightarrow\Delta: y=\frac{4}{3}\\ x=\frac{8}{3}\overset{(2)}{\Rightarrow}k=-\frac{5}{9}\Rightarrow\Delta: y=-\frac{5}{9}x+\frac{128}{81}\end{array}\right.$$

Bài 2: Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}$ (C). Tìm phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A\left(0;\frac{3}{2}\right)$ và tiếp xúc với đồ thị (C).

A. $\left[\begin{array}{l}\Delta: y=\frac{3}{2}\\ \Delta: y=-2\sqrt{2}x+\frac{3}{2}\\ \Delta: y=2\sqrt{2}x+\frac{3}{2}\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}\Delta: y=\frac{3}{2}x\\ \Delta: y=-\sqrt{2}x+\frac{3}{2}\\ \Delta: y=\sqrt{2}x+\frac{3}{2}\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}\Delta: y=\frac{3}{2}x+1\\ \Delta: y=-2x+\frac{1}{2}\\ \Delta: y=2x+\frac{1}{2}\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}\Delta: y=\frac{3}{2}\\ \Delta: y=-\sqrt{2}x+\frac{3}{2}\\ \Delta: y=2x+\frac{3}{2}\end{array}\right.$

✍***Bài làm:*** Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A và có hệ số góc k có dạng: $y=kx+\frac{3}{2}$.

Δ tiếp xúc với (C) tại điểm có hoành độ x khi hệ phương trình : $\begin{cases}\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}=kx+\frac{3}{2} & (1)\\ 2x^3-6x=k & (2)\end{cases}$ có nghiệm x

Thế (2) vào (1), ta có: $\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}=(2x^3-6x)x+\frac{3}{2}\Leftrightarrow x^2(x^2-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\overset{(2)}{\Rightarrow}k=0\Rightarrow\Delta: y=\frac{3}{2}\\ x=\sqrt{2}\overset{(2)}{\Rightarrow}k=-2\sqrt{2}\Rightarrow\Delta: y=-2\sqrt{2}x+\frac{3}{2}\\ x=-\sqrt{2}\overset{(2)}{\Rightarrow}k=2\sqrt{2}\Rightarrow\Delta: y=2\sqrt{2}x+\frac{3}{2}\end{array}\right.$

Bài 3: Viết phương trình tiếp tuyến của (C):

Câu 1. $y=\frac{x^3}{3}+x^2+3x-1$ đi qua điểm $A\left(0;\frac{1}{3}\right)$

A. $y=3x-\frac{1}{3}$ **B.** $y=3x+\frac{2}{3}$ **C.** $y=x+\frac{1}{3}$ **D.** $y=3x+\frac{1}{3}$

Bài làm: TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=x^2+2x+3$

Phương trình tiếp tuyến d của (C) có dạng : $y=y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)$

(trong đó x_0 là hoành độ tiếp điểm của d với (C))

$$y=(x_0^2+2x_0+3)(x-x_0)+\frac{x_0^3}{3}+x_0^2+3x_0-1=(x_0^2+2x_0+3)x-\frac{2}{3}x_0^3-x_0^2-1$$

$$A\left(0;\frac{1}{3}\right)\in d\Leftrightarrow\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}x_0^3-x_0^2-1\Leftrightarrow 2x_0^3+3x_0^2+4=0\Leftrightarrow x_0=-2.$$

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=3x+\frac{1}{3}$.

Câu 2. $y=-x^4+4x^2-3$ đi qua điểm cực tiểu của đồ thị.

A. $y=-3$; $y=-\frac{16}{\sqrt{3}}x-\frac{59}{9}$ **B.** $y=-3$; $y=-\frac{16}{3\sqrt{3}}x-\frac{5}{9}$

C. $y=-9$; $y=-\frac{16}{\sqrt{3}}x-\frac{5}{9}$ **D.** $y=-3$; $y=-\frac{16}{3\sqrt{3}}x-\frac{59}{9}$

Bài làm: **2.** Điểm cực tiểu của (C) là $A(0;-3)$.

Phương trình tiếp tuyến d của (C) có dạng : $y=y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)$

(trong đó x_0 là hoành độ tiếp điểm của d với (C))

$$y=(-4x_0^3+8x_0)(x-x_0)-x_0^4+4x_0^2-3\ =(-4x_0^3+8x_0)x+3x_0^4-4x_0^2-3$$

$$A(0;-3)\in d\Leftrightarrow -3=3x_0^4-4x_0^2-3\Leftrightarrow 3x_0^4-4x_0^2=0\ \Leftrightarrow x_0=0 \text{ hoặc } x_0=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Với $x_0=0$ thì phương trình d: $y=-3$

Với $x_0=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ thì phương trình d: $y=-\frac{16}{3\sqrt{3}}x-\frac{59}{9}$

Với $x_0=\frac{2}{\sqrt{3}}$ thì phương trình d: $y=\frac{16}{3\sqrt{3}}x-\frac{59}{9}$

Vậy, tiếp tuyến cần tìm là: $y=-3$, $y=-\frac{16}{3\sqrt{3}}x-\frac{59}{9}$, $y=\frac{16}{3\sqrt{3}}x-\frac{59}{9}$

Câu 3. $y=x^3-3x^2+2$ đi qua điểm $A\left(\frac{23}{9};-2\right)$.

A. $\left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=9x-25 \\ y=\frac{5}{3}x+\frac{61}{27} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=x-25 \\ y=\frac{5}{3}x+\frac{1}{27} \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=9x-2 \\ y=\frac{5}{3}x+\frac{61}{2} \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=x-5 \\ y=x+\frac{61}{27} \end{array}\right.$

***Bài làm:* 3.** Gọi $M_0(x_0;y_0)\in(C)$. Phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại M_0 là

$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-(x_0^3-3x_0^2+2)=(3x_0^2-6x_0)(x-x_0)$

Do (d) đi qua điểm $A\left(\frac{23}{9};-2\right)$ nên

$-2-(x_0^3-3x_0^2+2)=(3x_0^2-6x_0)\left(\frac{23}{9}-x_0\right)\Leftrightarrow 6x_0^3-32x_0^2+46x_0-12=0$

$\Leftrightarrow (x_0-2)(3x_0^2-10x_0+3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=2\Rightarrow y=-2 \\ x_0=3\Rightarrow y=9x-25 \\ x_0=\frac{1}{3}\Rightarrow y=\frac{5}{3}x+\frac{61}{27} \end{array}\right.$

Câu 4. $y=x^3-2x^2+x+4$ đi qua điểm $M(-4;-24)$.

A. $y=3x+508;\ y=x+8;\ y=5x-4.$ **B.** $y=13x+5;\ y=8x+8;\ y=5x-4.$

C. $y=133x+508;\ y=x+8;\ y=x-4.$ **D.** $y=133x+508;\ y=8x+8;\ y=5x-4.$

***Bài làm:* 4.** Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Giả sử tiếp tuyến cần tìm tiếp xúc với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) có dạng:

$y=y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)=(3x_0^2-4x_0+1)(x-x_0)+x_0^3-2x_0^2+x_0+4$

Vì (Δ) đi qua điểm $M(-4;-24)$ nên: $-24=(3x_0^2-4x_0+1)(-4-x_0)+x_0^3-2x_0^2+x_0+4$

$\Leftrightarrow x_0^3+5x_0^2-8x_0-12=0\Leftrightarrow x_0=-6$ hoặc $x_0=-1$ hoặc $x_0=2$.

- Với $x_0=-6$ thì phương trình tiếp tuyến là $y=133x+508$

- Với $x_0=-1$ thì phương trình tiếp tuyến là $y=8x+8$

- Với $x_0=2$ thì phương trình tiếp tuyến là $y=5x-4$

Vậy, có ba phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=133x+508;\ y=8x+8;\ y=5x-4.$

Bài 4:

Câu 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x^2-2x+1}{x-2}$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(6;4)$.

A. $y=5$ và $y=x-\frac{1}{2}$. **B.** $y=4$ và $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$. **C.** $y=5$ và $y=\frac{3}{4}x-6$. **D.** $y=4$ và $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$.

***Bài làm:* 1.** Đường thẳng Δ đi qua $M(6;4)$ với hệ số góc k có phương trình : $y=k(x-6)+4$

Δ tiếp xúc đồ thị tại điểm có hoành độ x_0 $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x-2}=k(x-6)+4 & (1) \\ 1-\dfrac{1}{(x-2)^2}=k & (2) \end{cases}$ có nghiệm x_0

Thay (2) vào (1) và biến đổi, ta được: $x_0+\dfrac{1}{x_0-2}=\left(1-\dfrac{1}{(x_0-2)^2}\right)(x_0-6)+4 \Leftrightarrow x_0=0, x_0=3$

Tahy vào (2) ta có: $k=\dfrac{3}{4}, k=0$.

Vậy tiếp tuyến cần tìm là: $y=4$ và $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$.

Câu 2. Viết phương trình tiếp tuyến d với đồ thị (C): $y=\dfrac{x+2}{x-2}$, biết d đi qua điểm $A(-6;5)$.

A. $y=x-1$, $y=\dfrac{x}{4}+\dfrac{7}{2}$. **B.** $y=-x-1$, $y=-\dfrac{x}{4}+\dfrac{5}{2}$.

C. $y=-x-1$, $y=-\dfrac{x}{4}+\dfrac{7}{2}$. **D.** $y=x-1$, $y=\dfrac{x}{4}-\dfrac{7}{2}$.

✍***Bài làm:* 2. Cách 1**: Gọi $(x_0;y(x_0))$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến d và (C), với

$y(x_0)=\dfrac{x_0+2}{x_0-2}$, tiếp tuyến d có hệ số góc $y'(x_0)=\dfrac{-4}{(x_0-2)^2}$, $x_0\neq 2$ và d có phương trình:

$y=\dfrac{-4}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0+2}{x_0-2}$

d đi qua điểm $A(-6;5)$ nên có $5=\dfrac{-4}{(x_0-2)^2}(-6-x_0)+\dfrac{x_0+2}{x_0-2}$ phương trình này tương đương với

$x_0^2-6x_0=0 \Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $x_0=6$

Với $x_0=0$, ta có phương trình: $y=-x-1$

Với $x_0=6$, ta có phương trình: $y=-\dfrac{x}{4}+\dfrac{7}{2}$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài $y=-x-1$, $y=-\dfrac{x}{4}+\dfrac{7}{2}$.

Cách 2: Phương trình d đi qua $A(-6;5)$ có hệ số góc k, khi đó d có phương trình là : $y=k(x+6)+5$

d tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi và chỉ khi hệ :

$\begin{cases} k(x_0+6)+5=\dfrac{x_0+2}{x_0-2} \\ k=-\dfrac{4}{(x_0-2)^2} \end{cases}$ có nghiệm x_0 hay $\begin{cases} 4x_0^2-24x_0=0 \\ k=-\dfrac{4}{(x_0-2)^2} \end{cases}$ có nghiệm x_0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0,\ k=-1 \Rightarrow d: y=-x-1 \\ x_0=6,\ k=-\dfrac{1}{4} \Rightarrow d: y=-\dfrac{x}{4}+\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài $y=-x-1$, $y=-\dfrac{x}{4}+\dfrac{7}{2}$.

Câu 3. Cho hàm số $y=x^3-3x^2-9x+11$ có đồ thị là (C). Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến đi qua điểm $I\left(\frac{29}{3};184\right)$.

A. $y=8x-36;\ y=36x-14;\ y=15x+9$ **B.** $y=40x-76;\ y=36x-14;\ y=15x+9$

C. $y=420x-76;\ y=x-164;\ y=x+39$ **D.** $y=420x-3876;\ y=36x-164;\ y=15x+39$

***Bài làm:* 3.** Giả sử tiếp tuyến cần tìm tiếp xúc với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi đó

phương trình tiếp tuyến (Δ) có dạng:

$y=y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)=(3x_0^2-6x_0-9)(x-x_0)+x_0^3-3x_0^2-9x_0+11$

Vì (Δ) đi qua điểm $I\left(\frac{29}{3};184\right)$ nên: $184=(3x_0^2-6x_0-9)\left(\frac{29}{3}-x_0\right)+x_0^3-3x_0^2-9x_0+11$

$\Leftrightarrow 2x_0^3-32x_0^2+58x_0+260=0 \Leftrightarrow x_0=13$ hoặc $x_0=5$ hoặc $x_0=-2$.

- Với $x_0=13$ thì phương trình tiếp tuyến là $y=420x-3876$
- Với $x_0=5$ thì phương trình tiếp tuyến là $y=36x-164$
- Với $x_0=-2$ thì phương trình tiếp tuyến là $y=15x+39$

Vậy, có ba phương trình tiếp tuyến cần tìm là:
$y=420x-3876;\ y=36x-164;\ y=15x+39$

Bài 5: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=x^3+3x^2-2$

Câu 1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng y = 9x – 7 .

A. y = 9x + 25 **B.** y = 7x + 2 **C.** y = 9x + 5 **D.** y = 9x + 2

***Bài làm:* 1.** Tiếp tuyến (d) của (C) song song với đường thẳng y = 9x – 7 ,suy ra phương trình (d) có dạng : y = 9x + m (m ≠ - 7)

(d) tiếp xúc với (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases} x_0^3+3x_0^2-2=9x_0+m \ (1) \\ 3x_0^2+6x_0=9 \ (2) \end{cases}$ có nghiệm x_0

(2) ⇔ $x_0 = 1 \vee x_0 = -3$.

Lần lượt thay $x_0 = 1$, $x_0 = -3$ vào (1) ta được m = - 7 , m = 25 và m = - 7 bị loại

Vậy phương trình tiếp tuyến (d): y = 9x + 25.

Câu 2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm A(- 2;7).

A. y = 9x + 25 **B.** y = 9x + 9 **C.** y = 9x + 2 **D.** y = x + 25

***Bài làm:* 2.** Phương trình tiếp tuyến (D) đi qua A(-2;7) có dạng y = k(x+2) +7 .

(D) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases} x_0^3+3x_0^2-2=k(x_0+2)+7 \ (3) \\ 3x_0^2+6x_0=k \ (4) \end{cases}$ có nghiệm x_0

Thay (4) vào (3) ta được: $x_0^3+3x_0^2-2=(3x_0^2+6x_0)(x_0+2)+7 \Leftrightarrow 2x_0^3+9x_0^2+12x_0+9=0 \Leftrightarrow x_0=-3$

Thay $x_0 = -3$ vào (4) ta được k = 9. Suy ra phương trình (D): y = 9x + 25.

Bài 6: Cho hàm số $y=(2-x)^2x^2$, có đồ thị (C).

Câu 1. Viết phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của (C) với Parabol $y=x^2$.

A. $y=0$; $y=1$; $y=24x-6$ **B.** $y=9$; $y=1$; $y=24x-6$

C. $y=0$; $y=5$; $y=24x-63$ **D.** $y=0$; $y=1$; $y=24x-63$

✍***Bài làm:*** **1**. Ta có: $y=x^4-4x^3+4x^2 \Rightarrow y'=4x^3-12x^2+8x$ Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Parabol $y=x^2$

$x^4-4x^3+4x^2=x^2 \Leftrightarrow x^2(x^2-4x+3)=0 \Leftrightarrow x=0, x=1, x=3$.

- $x=0$ ta có phương trình tiếp tuyến là: $y=0$.
- $x=1$ ta có phương trình tiếp tuyến là: $y=1$
- $x=3$ ta có phương trình tiếp tuyến là: $y=24x-63$.

Câu 2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(2;0)$.

A. $y=-\frac{2}{27}x+\frac{6}{27}$ **B.** $y=-\frac{32}{27}x+9$ **C.** $y=-\frac{32}{27}x+\frac{4}{27}$ **D.** $y=-\frac{32}{27}x+\frac{64}{27}$

✍***Bài làm:*** **2**. Ta có: $y=x^4-4x^3+4x^2 \Rightarrow y'=4x^3-12x^2+8x$ **Cách 1:** Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$.

Tiếp tuyến Δ của (C) tại M có phương trình :

$y=(4x_0^3-12x_0^2+8x_0)(x-x_0)+y_0$.

$A\in\Delta \Leftrightarrow 0=(4x_0^3-12x_0^2+8x_0)(2-x_0)+x_0^2(x_0-2)^2$

$\Leftrightarrow (2-x_0)(3x_0^3-10x_0^2+8x_0)=0 \Leftrightarrow x_0=0, x_0=2, x_0=\frac{4}{3}$.

* $x_0=0 \Rightarrow y'(x_0)=0, y_0=0 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=0$

* $x_0=2 \Rightarrow y'(x_0)=0, y_0=0 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=0$

* $x=\frac{4}{3} \Rightarrow y'(x_0)=-\frac{32}{27}, y_0=\frac{64}{81} \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến: $y=-\frac{32}{27}x+\frac{64}{27}$.

Cách 2: Gọi d là đường thẳng đi qua A, có hệ số góc k $\Rightarrow d: y=k(x-2)$

d tiếp xúc đồ thị tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases}(2-x_0)^2x_0^{\ 2}=k(x_0-2)\\ 4x_0(x_0-2)(x_0-1)=k\end{cases}$ có nghiệm x_0

Thay k vào phương trình thứ nhất ta được:

$x_0^4-4x_0^3+4x_0^2=(x_0-2)(4x_0^3-12x_0^2+8x_0) \Leftrightarrow x_0(3x_0-4)(x_0-2)^2=0$

$\Leftrightarrow x_0=0, x_0=2, x_0=\frac{4}{3}$.

* $x_0=0 \Rightarrow k=0 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=0$

* $x_0=2 \Rightarrow k=0 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=0$

* $x_0=\frac{4}{3} \Rightarrow k=-\frac{32}{27} \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=-\frac{32}{27}x+\frac{64}{27}$.

Bài 7:

Câu 1. Tìm m để (Cm): $y=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}(m+2)x^2+2mx+1$ tiếp xúc với đường thẳng y = 1

A. $m\in\left\{0;\frac{2}{3};2\right\}$ **B.** $m\in\left\{4;\frac{2}{3};6\right\}$ **C.** $m\in\{0;4;6\}$ **D.** $m\in\left\{0;\frac{2}{3};6\right\}$

***Bài làm:* 1.** (Cm) tiếp xúc đường thẳng y = 1 tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ sau

$$\begin{cases}\frac{x_0^3}{3}-\frac{1}{2}(m+2)x_0^2+2mx_0+1=1 & (a)\\ x_0^2-(m+2)x_0+2m=0 & (b)\end{cases}$$ có nghiệm x_0.

$(b)\Leftrightarrow x_0=2\vee x_0=m.$

Thay $x_0=2$ vào (a) ta được $m=\frac{2}{3}$.

Thay $x_0=m$ vào (a) ta được $-\frac{m^3}{6}+m^2=0\Leftrightarrow m=0\vee m=6.$

Vậy (Cm) tiếp xúc đường thẳng y = 1 $\Leftrightarrow m\in\left\{0;\frac{2}{3};6\right\}$

Câu 2. Gọi (C) là đồ thị của hàm số y = $\frac{x-2}{2x-1}$. M(0;m) là một điểm thuộc trục Oy .Với giá trị nào của m thì luôn tồn tại ít nhất một tiếp tuyến của (C) đi qua M và tiếp điểm của tiếp tuyến này với (C) có hoành độ dương.

A. $m>0$ **B.** $m\ge 0$ **C.** m<0 **D.** $m\le 0$

***Bài làm:* 2.** Phương trình của đường thẳng (d) đi qua M có hệ số góc k : y = kx + m.

(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ sau $$\begin{cases}\frac{x_0-2}{2x_0-1}=kx_0+m & (1)\\ \frac{3}{(2x_0-1)^2}=k & (2)\end{cases}$$ có nghiệm x_0.

Thay (2) vào (1) ta được : $\frac{x_0-2}{2x_0-1}=\frac{3x_0}{(2x_0-1)^2}+m \Leftrightarrow (x_0-2)(2x_0-1)=3x+m(2x_0-1)^2$ (3) (do $x_0=\frac{1}{2}$ không phải là nghiệm của (3)) $\Leftrightarrow (4m-2)x_0^2-4(m-2)x_0+m-2=0$ (4)

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow$ Phương trình (4) có ít nhất một nghiệm dương với mọi $m\le 0$. Vì $m\le 0$ nên 4m – 2 < 0 suy ra (4) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'=4(m-2)^2-(4m-2)(m-2)\ge 0\Leftrightarrow m-2\le 0$. Bất đẳng thức này đúng với mọi $m\le 0$.

Khi đó gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình (4).

Ta có $\forall m\le 0$, $$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{4(m-2)}{4m-2}>0\\ x_1x_2=\frac{m-2}{4m-2}>0\end{cases}$$,suy ra $x_1>0,x_2>0$

Vậy, với mọi $m\le 0$ luôn tồn tại ít nhất một tiếp tuyến của (C) đi qua M và hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến với (C) là số dương.

Bài 8:

Câu 1. Cho hàm số $y=x^3-3x+2$ .Tìm trên đường thẳng $d:y=4$ các điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến với (C).

A. $(-1;4)$; $(7;4)$; $(2;4)$. **B.** $(-1;4)$; $(7;4)$; $(9;4)$.

C. $(-2;4)$; $(-5;4)$; $(2;4)$. **D.** $(-1;4)$; $\left(-\frac{2}{3};4\right)$; $(2;4)$.

***Bài làm:* 1.** Gọi $M(m;4)\in d$. Phương trình đường thẳng Δ qua M có dạng: $y=k(x-m)+4$

Δ là tiếp tuyến của (C) ⇔ hệ phương trình sau có nghiệm x:

$\begin{cases} x^3-3x+2=k(x-m)+4 & (1) \\ 3x^2-3=k & (2) \end{cases}$ (*)

Thay (2) vào (1) ta được: $(x+1)\left[2x^2-(3m+2)x+3m+2\right]=0$ (3)

$\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $2x^2-(3m+2)x+3m+2=0$ (4)

Theo bài toán ⇔ (*) có nghiệm x, đồng thời (2) có 2 giá trị k khác nhau, tức là phương trình (3) có nghiệm x phân biệt thỏa mãn 2 giá trị k khác nhau.

+ TH1: (4) có 2 nghiệm phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bằng –1 ⇔ $m=-1$

+ TH2: (4) có nghiệm kép khác –1 ⇔ $m=-\frac{2}{3}$ hoặc $m=2$

Vậy các điểm cần tìm là: $(-1;4)$; $\left(-\frac{2}{3};4\right)$; $(2;4)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-2$.Tìm trên đường thẳng (*d*): *y* = 2 các điểm mà từ đó kẻ được 3 tiếp tuyến phân biệt với đồ thị (C).

A. M(m; 2) ∈ (d) với $\begin{cases} m<-2 \vee m>\frac{1}{3} \\ m\neq 2 \end{cases}$

B. M(m; 2) ∈ (d) với $m<-7$

C. M(m; 2) ∈ (d) với $\begin{cases} m<-3 \vee m>\frac{4}{3} \\ m\neq 2 \end{cases}$

D. M(m; 2) ∈ (d) với $\begin{cases} m<-1 \vee m>\frac{5}{3} \\ m\neq 2 \end{cases}$

✍***Bài làm:*** **2.** Gọi $M(m;2)\in(d)$.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M có dạng : $y=k(x-m)+2$

Δ là tiếp tuyến của (C) ⇔ hệ phương trình sau có nghiệm x:

$\begin{cases} -x^3+3x^2-2=k(x-m)+2 & (1) \\ -3x^2+6x=k & (2) \end{cases}$ (*).

Thay (2) và (1) ta được: $2x^3-3(m+1)x^2+6mx-4=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[2x^2-(3m-1)x+2\right]=0$ $\Leftrightarrow x=2$ hoặc $f(x)=2x^2-(3m-1)x+2=0$ (3)

Từ M kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C) ⇔ hệ (*) có nghiệm x phân biệt đồng thời

(2) có 3 giá trị k khác nhau ⇔ (3) có hai nghiệm phân biệt khác 2 và có giá trị x thỏa

phương trình (2) có 3 giá trị k khác nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ f(2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-1 \vee m>\frac{5}{3} \\ m\neq 2 \end{cases}$.

Vậy ,M(m; 2) ∈ (d) với $\begin{cases} m<-1 \vee m>\frac{5}{3} \\ m\neq 2 \end{cases}$ có thể kẻ được 3 tiếp tuyến với (C).

Câu 3. Viết phương trình tiếp tuyến d tiếp xúc với đồ thị (H): $y=\left(x^2-1\right)^2$ của hàm số tại đúng 2 điểm phân biệt.

A. $y=2x$ **B.** $y=0$ **C.** $y=2x+1$ **D.** $y=1$

***Bài làm:* 4.** Giả sử d là đường thẳng tiếp xúc với (H) tại điểm $M\left(m;\left(m^2-1\right)^2\right)$. Khi đó đường thẳng d có phương trình: $y=2m\left(m^2-1\right)(x-m)+\left(m^2-1\right)^2$

Đường thẳng d tiếp xúc với (H) tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi hệ phương trình

$\begin{cases}\left(x^2-1\right)^2=2m\left(m^2-1\right)(x-m)+\left(m^2-1\right)^2\\ 2x\left(x^2-1\right)=2m\left(m^2-1\right)\end{cases}$ có đúng một nghiệm khác m tức hệ

$\begin{cases}(x-m)\left[x\left(x^2+mx+m^2\right)-m^3-2x\right]=0\\ (x-m)\left(x^2+mx+m^2-1\right)=0\end{cases}$ có đúng một nghiệm khác m hay $\begin{cases}x=-m^3\\ x^2+mx+m^2-1=0\end{cases}$ có nghiệm $x=1,m=-1$ hoặc $x=-1,m=1$.

Vậy $y=0$ thỏa đề bài.

Bài 9. Cho hàm số $y=x^4-2x^2+3$, có đồ thị là (C)

Câu a. Tìm trên đồ thị (C) điểm B mà tiếp tuyến với (C) tại điểm đó song song với tiếp tuyến với (C) tại điểm $A(1;2)$.

A. $B(1;2)$ **B.** $B(0;3)$ **C.** $B(-1;3)$ **D.** $B\left(\sqrt{2};3\right)$

Bài làm: $B(0;3)$, $y=3$.

Câu b. Tìm trên đường thẳng $y=2$ những điểm mà qua đó ta kẻ được 4 tiếp tuyến phân biệt với đồ thị (C).

A. $M(0;2),M(1;2)$ **B.** $M(0;2),M(3;2)$ **C.** $M(5;2),M(1;2)$ **D.** Không tồn tại

Bài làm: b. Gọi $M(m;2)$ là điểm thuộc đường thẳng $y=2$. Phương trình đường thẳng đi qua $M(m;2)$ có hệ số góc là k và (d): $y=k(x-m)+2$. (d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases}x_0^4-2x_0^2+3=k(x_0-m)+2 & (1)\\ 4x_0^3-4x_0=k & (2)\end{cases}$ có nghiệm x_0 suy ra phương trình: $\left(x_0^2-1\right)\left(3x_0^2-4ax_0+1\right)=0$ $(*)$ có nghiệm x_0.

Qua M kẻ được 4 tiếp tuyến đến (C) khi phương trình $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt và phương trình (2) có 4 giá trị k khác nhau.

Dễ thấy $x_0^2-1=0\Rightarrow k(-1)=k(1)$, do đó không thể tồn tại 4 giá trị k khác nhau để thỏa bài toán. Tóm lại, không có tọa độ M thỏa bài toán.

Bài 10 . Cho hàm số : $y=x^4-2x^2$ có đồ thị là (C).

Câu a. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua gốc tọa độ.

A. $(t_1):y=0;(t_2):y=-\frac{\sqrt{6}}{9}x;\ (t_3):y=\frac{\sqrt{6}}{9}x$ **B.** $(t_1):y=0;(t_2):y=-\frac{4\sqrt{6}}{7}x;\ (t_3):y=\frac{4\sqrt{6}}{7}x$

C. $(t_1):y=0;(t_2):y=-\frac{4}{9}x;\ (t_3):y=\frac{4}{9}x$ **D.** $(t_1):y=0;(t_2):y=-\frac{4\sqrt{6}}{9}x;\ (t_3):y=\frac{4\sqrt{6}}{9}x$

Bài làm: a. Gọi $A(x_0;y_0)\in(C)$.Phương trình tiếp tuyến (t) của (C) tại A là:

$y-\left(x_0^4-2x_0^2\right)=\left(4x_0^3-4x_0\right)(x-x_0)$. (t) đi qua $O(0;0)$ nên

$-\left(x_0^4-2x_0^2\right)=\left(4x_0^4-4x_0\right)(-x_0)\Leftrightarrow 3x_0^4-2x_0^2=0\Leftrightarrow x_0=0,x_0=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

Thay các giá trị của x_0 vào phương trình của (t) ta được 3 tiếp tuyến của (C) kẻ từ $O(0;0)$ là:

$(t_1): y=0; (t_2): y=-\frac{4\sqrt{6}}{9}x;\ (t_3): y=\frac{4\sqrt{6}}{9}x$

Câu b..Tìm những điểm M trên trục Oy để từ M kẻ được 4 tiếp tuyến đến (C).

A. $M(0;m)$ với $0<m<1$ **B.** $M(0;m)$ với $-1<m<\frac{1}{3}$

C. $M(0;m)$ với $0<m<\frac{2}{3}$ **D.** $M(0;m)$ với $0<m<\frac{1}{3}$

Bài làm: b. $M\in Oy \Rightarrow M(0;m); B\in(C)\Rightarrow B(x_0;y_0)$

Phương trình tiếp tuyến (T) của (C) tại B là $y-(x_0^4-2x_0^2)=(4x_0^3-4x_0)(x-x_0)$. (T) đi qua $M(0;m)$ nên

$m-(x_0^4-2x_0^2)=(4x_0^4-4x_0)(-x_0)\Leftrightarrow 3x_0^4-2x_0^2+m=0\ (*)$

Do hệ số góc của tiếp tuyến là $k=4x_0^3-4x_0$ nên hai giá trị khác nhau của x_0 cho hai giá trị khác nhau của k nên cho hai tiếp tuyến khác nhau

Vậy từ $M(0;m)$ kẻ được 4 tiếp tuyến đến đồ thị (C) khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt.

Đặt $X=x_0^2$ ta có phương trình $3X^2-2X+m=0\ (**)$

Phương trình $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $(**)$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=1-3m>0\\ P=\frac{m}{3}>0\\ S=\frac{2}{3}>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<\frac{1}{3}$. Vậy từ những điểm $M(0;m)$ với $0<m<\frac{1}{3}$ kẻ được 4 tiếp tuyến đến đồ thị (C) của hàm số đã cho.

Câu c. Tìm những điểm N trên đường thẳng $(d): y=3$ để từ N kẻ được 4 tiếp tuyến đến (C).

A. $N(n;3), |n|>\sqrt{3}$ **B.** $N(n;3), n>\sqrt{3}$ **C.** $N(n;3), n>\sqrt{2}$ **D.** $N(n;3), |n|<\sqrt{13}$

Bài làm: c. $N\in(d): y=3\Rightarrow N(n;3); I\in(C)\Rightarrow I(x_0;y_0)$

Phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) tại I là: $y-(x_0^4-2x_0^2)=(4x_0^3-4x_0)(x-x_0)$. (Δ) đi qua $N(n;3)$ nên

$3-(x_0^4-2x_0^2)=(4x_0^4-4x_0)(n-x_0)\Leftrightarrow 3x_0^4-4nx_0^2-2x_0^2+4nx_0+3=0$

$\Leftrightarrow 3(x_0^4+1)-4n(x_0^3-x_0)-2x_0^2=0(*)$.Do $x_0=0$ không phải là nghiệm của $(*)$ .Phương trình

$(*)\Leftrightarrow 3\left(x_0^2-\frac{1}{x_0^2}\right)-4n\left(x_0-\frac{1}{x_0}\right)-2=0(**)$

Đặt $t=x_0-\frac{1}{x_0}\Leftrightarrow x_0^2-tx_0-1=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi t

Ta có phương trình $(**)\Leftrightarrow 3t^2-4nt+4=0(***)$

Do hệ số góc của tiếp tuyến là $k=4x_0^3-4x_0$ nên hai giá trị khác nhau của x_0 cho hai giá trị khác nhau của k nên cho hai tiếp tuyến khác nhau

Vậy từ N kẻ được 4 tiếp tuyến đến đồ thị (C) khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $(**)$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(***)$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 4n^2 - 12 > 0$ $\Leftrightarrow n^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow |n| > \sqrt{3}$. Vậy từ những điểm N trên đường thẳng $y = 3$ với $|n| > \sqrt{3}$ kẻ được 4 tiếp tuyến đến đồ thị (C) của hàm số đã cho.

Bài 10:

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (4-3m)x + 1$ có đồ thị là (C_m). Tìm các giá trị m sao cho trên đồ thị (C_m). tồn tại một điểm duy nhất có hoành độ âm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $(d): x + 2y - 3 = 0$.

A. $m < 12$ hoặc $m > \frac{2}{3}$. **B.** $m < 0$ hoặc $m > 1$ **C.** $m < 1$ hoặc $m > \frac{1}{3}$ **D.** $m < 0$ hoặc $m > \frac{2}{3}$

***Bài làm:* 1.** (d) có hệ số góc $-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ tiếp tuyến có hệ số góc $k = 2$. Gọi x là hoành độ tiếp điểm thì:

$y' = 2 \Leftrightarrow mx^2 + 2(m-1)x + (4-3m) = 2 \Leftrightarrow mx^2 + 2(m-1)x + 2 - 3m = 0 \quad (*)$

Theo bài toán, phương trình $(*)$ có đúng một nghiệm âm.

Nếu $m = 0$ thì $(*) \Leftrightarrow -2x = -2 \Leftrightarrow x = 1$ (không thỏa)

Nếu $m \neq 0$ thì dễ thấy phương trình $(*)$ có 2 nghiệm là $x = 1$ hay $x = \frac{2-3m}{m}$

Do đó để $(*)$ có một nghiệm âm thì $\frac{2-3m}{m} < 0 \Leftrightarrow m < 0$ hoặc $m > \frac{2}{3}$.

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (4-3m)x + 1$ có đồ thị là (C_m). Tìm các giá trị m sao cho trên đồ thị (C_m). tồn tại đúng hai điểm có hoành độ dương mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $(d): x + 2y - 3 = 0$.

A. $m \in \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$ **B.** $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{3}\right)$ **C.** $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{8}{3}\right)$ **D.** $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$

***Bài làm:* 2.** Ta có: $y' = mx^2 + 2(m-1)x + 4 - 3m$; $d: y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Theo yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 2$ có đúng 2 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow$ $mx^2 + 2(m-1)x + 2 - 3m = 0$ có đúng 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < m < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} < m < \frac{2}{3} \end{array}\right..$$

Vậy, với $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$ thỏa mãn bài toán

Câu 3. Cho hàm số: $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C). Cho điểm $A(0;a)$. Tìm a để từ A kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị (C) sao cho 2 tiếp điểm tương ứng nằm về 2 phía của trục hoành.

A. $-\frac{1}{3}<a\neq 1$ **B.** $-\frac{2}{3}<a\neq 2$ **C.** $-1<a\neq 1$ **D.** $-\frac{2}{3}<a\neq 1$

✍***Bài làm:*** **3.** Phương trình đường thẳng (d) đi qua $A(0;a)$ và có hệ số góc k: $y=kx+a$

(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x khi hệ: $\begin{cases}\frac{x+2}{x-1}=kx+a\\ k=\frac{-3}{(x-1)^2}\end{cases}$ có nghiệm x

$\Rightarrow (1-a)x^2+2(a+2)x-(a+2)=0$ (1) có nghiệm $x\neq 1$.

Để qua A có 2 tiếp tuyến thì (1) phải có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow \begin{cases}a\neq 1\\ \Delta'=3a+6>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\neq 1\\ a>-2\end{cases}$ (2)

Khi đó ta có: $x_1+x_2=\frac{2(a+2)}{a-1}$, $x_1x_2=\frac{a+2}{a-1}$ và $y_1=1+\frac{3}{x_1-1}$, $y_2=1+\frac{3}{x_2-1}$

Để 2 tiếp điểm nằm về 2 phía đối với trục hoành thì $y_1.y_2<0$

$\Leftrightarrow \left(1+\frac{3}{x_1-1}\right).\left(1+\frac{3}{x_2-1}\right)<0 \Leftrightarrow \frac{x_1.x_2+2(x_1+x_2)+4}{x_1.x_2-(x_1+x_2)+1}<0 \Leftrightarrow 3a+2>0 \Leftrightarrow a>-\frac{2}{3}$

Đối chiếu với điều kiện (2) ta được: $-\frac{2}{3}<a\neq 1$.

Bài 11: Cho hàm số $y=-\frac{2x^3}{3}+x^2+4x-2$, gọi đồ thị của hàm số là (C).

Câu 1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc lớn nhất.

A. $y=\frac{9}{2}x-\frac{25}{12}$ **B.** $y=5x-\frac{25}{12}$ **C.** $y=\frac{9}{4}x-\frac{25}{12}$ **D.** $y=\frac{7}{2}x+\frac{5}{12}$

✍***Bài làm:*** **1.** Gọi (d) là tiếp tuyến cần tìm phương trình và x_0 là hoành độ tiếp điểm của (d) với (C) thì hệ số góc của (d): $k=y'(x_0)=-2x_0^2+2x_0+4=\frac{9}{2}-\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2\leq\frac{9}{2}$ $k=\frac{9}{2}\Leftrightarrow x_0=\frac{1}{2}$.

Vậy maxk $=\frac{9}{2}$ đạt được khi và chỉ khi $x_0=\frac{1}{2}$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến (d) : $y=\frac{9}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{2}x-\frac{25}{12}$.

Câu 2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm A(2;9).

A. y = - x + 2 **B.** y = - 8x + 5 **C.** y = x + 25 **D.** y = - 8x + 25

✍***Bài làm:*** **2.** Phương trình đường thẳng (D) đi qua điểm A(2;9) có hệ số góc k là $y=k(x-2)+9$

(D) tiếp xúc với (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases}-\frac{2x_0^3}{3}+x_0^2+4x_0-2=k(x_0-2)+9 \quad (1)\\ -2x_0^2+2x_0+4=k \quad (2)\end{cases}$ có nghiệm x_0.

Thay (2) vào (1) ta được : $-\frac{2x_0^3}{3}+x_0^2+4x_0-2=(-2x_0^2+2x_0+4)(x_0-2)+9$

$\Leftrightarrow 4x_0^3-15x_0^2+12x_0-9=0\Leftrightarrow x_0=3$

Thay $x_0=3$ vào (2) ta được k = - 8 .

Vậy phương trình tiếp tuyến (D) là y = - 8x + 25.

Bài 12: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\frac{x^2}{2-x}$.

Câu 1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y=\frac{4}{3}x+1$.

A. $(d):\ y=-\frac{3}{4}x-\frac{7}{2},y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$

B. $(d):\ y=-\frac{3}{4}x,y=-\frac{3}{4}x-1$

C. $(d):\ y=\frac{3}{4}x-\frac{9}{2},y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$

D. $(d):\ y=-\frac{3}{4}x-\frac{9}{2},y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$

✍***Bài làm:*** **1.** Tiếp tuyến (d) của (C) vuông góc đường thẳng $y=\frac{4}{3}x+1$ suy ra phương trình (d) có dạng : $y=-\frac{3}{4}x+m$.

(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases}\frac{x_0^2}{2-x_0}=-\frac{3}{4}x_0+m\\ \frac{-x_0^2+4x_0}{(2-x_0)^2}=-\frac{3}{4}\end{cases}$ có nghiệm x_0 $\Rightarrow\frac{-x_0^2+4x_0}{(2-x_0)^2}=-\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow x_0=6\vee x_0=-2\ \Rightarrow(d):\ y=-\frac{3}{4}x-\frac{9}{2},y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$.

Câu 2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm A(2; - 2).

A. $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$

B. $y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$

C. $y=-\frac{3}{4}x-\frac{7}{2}$

D. $y=-\frac{3}{4}x-\frac{5}{2}$

✍***Bài làm:*** **2.** Phương trình tiếp tuyến (d) của (C) đi qua A(2 ; - 2) có dạng : y = k(x – 2) – 2 .

(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases}\frac{x_0^2}{2-x_0}=k(x_0-2)-2\ \ (1)\\ \frac{-x_0^2+4x_0}{(2-x_0)^2}=k\end{cases}$ có nghiệm

$x_0\Rightarrow\frac{x_0^2}{2-x_0}=\frac{-x_0^2+4x_0}{(2-x_0)^2}(x_0-2)-2\quad\Leftrightarrow x_0=-2\Rightarrow y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$

Câu 3. Gọi M là một điểm thuộc (C) có khoảng cách từ M đến trục hoành bằng hai lần khoảng cách từ M đến trục tung, M không trùng với gốc tọa độ O. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại M.

A. $y=-9$ **B.** $y=-64$ **C.** $y=-12$ **D.** $y=-8$

✍***Bài làm:*** **3.** $\begin{cases}M\in(C)\\ d(M,Ox)=2d(M,Oy)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_M=\frac{x_M^2}{2-x_M}\\ |y_M|=2|x_M|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_M=\frac{x_M^2}{2-x_M}\\ y_M=\pm2x_M\end{cases}$.

(*) $\begin{cases}y_M=\frac{x_M^2}{2-x_M}\\ y_M=2x_M\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_M=2x_M\\ 2x_M=\frac{x_M^2}{2-x_M}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_M=2x_M\\ 3x_M^2-4x_M=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=0\\ y_M=0\end{cases}\vee\begin{cases}x_M=\frac{4}{3}\\ y_M=\frac{8}{3}\end{cases}$

Vì M không trùng với gốc tọa độ O nên chỉ nhận $M\left(\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là y = 8x – 8.

$(*)\begin{cases} y_M = \dfrac{x_M^2}{2-x_M} \\ y_M = -2x_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = -2x_M \\ -2x_M = \dfrac{x_M^2}{2-x_M} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = -2x_M \\ x_M^2 - 4x_M = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 4 \\ y_M = -8 \end{cases}$ (do M ≠ O).

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y = -8$.

Bài 13: Gọi (Cm) là đồ thị của hàm số y = $2x^3 - 3(m+1)x^2 + mx + m + 1$ và (d) là tiếp tuyến của (Cm) tại điểm có hoành độ x = - 1. Tìm m để

Câu 1. (d) đi qua điểm A(0;8).

A. $m = 0$ **B.** $m = 1$ **C.** $m = 2$ **D.** $m = 3$

✍***Bài làm:* 1.**

Ta có $y' = 6x^2 - 6(m+1)x + m$, suy ra phương trình tiếp tuyến (d) là

$y = y'(-1)(x+1) + y(-1) =$ (12+7m)(x+1) – 3m – 4 $\Leftrightarrow y =$ (12+7m)x +4m+8

$A(0;8) \in (d) \Leftrightarrow$ 8 = 4m +8 $\Leftrightarrow m = 0$.

Câu 2. (d) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{8}{3}$.

A. $\left[\begin{array}{l} m = 0 \vee m = -\frac{5}{3} \\ m = \frac{-9 \pm \sqrt{73}}{6} \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m = 0 \vee m = \frac{5}{3} \\ m = \frac{-19 \pm \sqrt{73}}{6} \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m = 0 \vee m = -\frac{5}{3} \\ m = \frac{-9 \pm \sqrt{3}}{6} \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m = 0 \vee m = -\frac{5}{3} \\ m = \frac{-19 \pm \sqrt{73}}{6} \end{array}\right.$.

✍***Bài làm:* 2.** Ta có $y' = 6x^2 - 6(m+1)x + m$, suy ra phương trình tiếp tuyến (d) là

$y = y'(-1)(x+1) + y(-1) =$ (12+7m)(x+1) – 3m – 4 $\Leftrightarrow y =$ (12+7m)x +4m+8

Gọi P,Q lần lượt là giao điểm của (d) với trục Ox và Oy thì $P\left(-\dfrac{4m+8}{12+7m};0\right)$, Q(0; 4m+8).

Diện tích: OPQ: $S = \dfrac{1}{2}OP.OQ = \dfrac{1}{2}\left|-\dfrac{4m+8}{12+7m}\right||4m+8| = \dfrac{|8m^2+32+32m|}{|12+7m|}$

$S = \dfrac{8}{3} \Leftrightarrow |8m^2+32m+32| = \dfrac{8}{3}|12+7m|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8m^2+32m+32 = \frac{8}{3}(12+7m) \\ 8m^2+32m+32 = -\frac{8}{3}(12+7m) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 + \frac{5}{3}m = 0 \\ 3m^2+19m+24 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \vee m = -\frac{5}{3} \\ m = \frac{-19 \pm \sqrt{73}}{6} \end{array}\right.$.

Bài 14: Cho hàm số $y = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2 + 4$, có đồ thị là (C).

Câu 1. Tìm tham số m để đồ thị (C) tiếp xúc với parabol (P): $y = x^2 + m$.

A. $m = 4; m = 20$ **B.** $m = 124; m = 2$ **C.** $m = 14; m = 20$ **D.** $m = 4; m = 2$

✍***Bài làm:* 1.** (C) tiếp xúc (P) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ sau có nghiệm x_0

$\begin{cases} \dfrac{x_0^4}{4} - 2x_0^2 + 4 = x_0^2 + m \\ x_0^3 - 4x_0 = 2x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ m = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x_0 = 6 \\ m = 20 \end{cases}$

Câu 2. Gọi (d) là tiếp tuyến của (C) tại điểm M có hoành độ x = a .Tìm a để (d) cắt lại (C) tại hai điểm E, F khác M và trung điểm I của đoạn E, F nằm trên parabol (P’): y $= -x^2 + 4$.

A. a = 0 **B.** a = -1 **C.** a = 2 **D.** a = 1

Bài làm:.Phương trình tiếp tuyến (d):

$y = y'(a)(x-a)+\frac{a^4}{4}-2a^2+4=(a^3-4a)(x-a)+\frac{a^4}{4}-2a^2+4=(a^3-4a)x-\frac{3a^4}{4}+2a^2+4$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$\frac{x^4}{4}-2x^2+4=(a^3-4a)x-\frac{3a^4}{4}+2a^2+4 \Leftrightarrow x^4-8x^2-4(a^3-4a)x+3a^4-8a^2=0$

$\Leftrightarrow (x-a)^2(x^2+2ax+3a^2-8)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x^2+2ax+3a^2-8=0\ \ (3)\end{array}\right.$

(d) cắt (C) tại hai điểm E,F khác M $\Leftrightarrow$ Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt khác a

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=a^2-3a^2+8>0 \\ 6a^2-8\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<a<2 \\ a\neq \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\end{cases}$. (*)

Tọa độ trung điểm I của E,F :

$\begin{cases} x_I=\frac{x_E+x_F}{2}=-a \\ y_I=(a^3-4a)(-a)-\frac{3a^4}{4}+2a^2+4 \quad (do\ I\in(d))\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I=-a \\ y_I=-\frac{7a^4}{4}+6a^2+4\end{cases}$

$I\in(P): y=-x^2+4 \Leftrightarrow -\frac{7a^4}{4}+6a^2+4=-a^2+4 \Leftrightarrow 7a^2(1-\frac{a^2}{4})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=\pm 2\end{array}\right.$.

So với điều kiện (*) nhận a = 0.

Bài 15:

Câu 1. Tìm m để đồ thị hàm số $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ tiếp xúc với Parabol $y=x^2+m$.

A. $m=-2$ **B.** $m=0$ **C.** $m=-1$ **D.** $m=3$

***Bài làm:* 1.** Hai đường cong đã cho tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ x_0 $\Leftrightarrow$ hệ phương trình :

$\begin{cases} \frac{x_0^2-x_0+1}{x_0-1}=x_0^2+m \quad (1) \\ \frac{x_0^2-2x_0}{(x_0-1)^2}=2x_0 \quad (2)\end{cases}$ có nghiệm x_0.

Ta có: $(2)\Leftrightarrow x_0(2x_0^2-5x_0+4)=0\Leftrightarrow x=0$ thay vào (1) ta được $m=-1$.

Vậy $m=-1$ là giá trị cần tìm.

Câu 2. Tìm m để đồ thị hai hàm số sau tiếp xúc với nhau

$(C_1): y=mx^3+(1-2m)x^2+2mx$ và $(C_2): y=3mx^3+3(1-2m)x+4m-2$.

A. $m=\frac{1}{2}, m=\frac{3\pm\sqrt{6}}{2}$ **B.** $m=\frac{1}{2}, m=\frac{8\pm\sqrt{6}}{12}$ **C.** $m=\frac{5}{2}, m=\frac{3\pm\sqrt{6}}{12}$ **D.** $m=\frac{1}{2}, m=\frac{3\pm\sqrt{6}}{12}$

***Bài làm:* 2.** (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ x_0 $\Leftrightarrow$ hệ phương trình sau có nghiệm

$x_0: \begin{cases} mx_0^3+(1-2m)x_0^2+2mx_0=3mx_0^3+3(1-2m)x_0+4m-2 \\ 3mx_0^2+2(1-2m)x_0+2m=9mx_0^2+3(1-2m)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2mx_0^3-(1-2m)x_0^2+(3-8m)x_0+4m-2=0 & (1) \\ 6mx_0^2-2(1-2m)x_0+3-8m=0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm x_0

Ta có : (1) $\Leftrightarrow (x_0-1)(2mx_0^2-(1-4m)x_0-4m+2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ 2mx_0^2-(1-4m)x_0-4m+2=0 \end{array}\right.$

- Với $x_0=1$ thay vào (2), ta có: $m=\dfrac{1}{2}$.
- Với $2mx_0^2-(1-4m)x_0-4m+2=0$ (*) ta có :

(2) $\Leftrightarrow 4mx_0^2-x_0+1-4m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=\dfrac{1-4m}{4m} \end{array}\right.$ $(m\neq 0$ vì $m=0$ hệ vô nghiệm)

Thay $x_0=\dfrac{1-4m}{4m}$ vào (*) ta được:

$\dfrac{(1-4m)^2}{8m}-\dfrac{(1-4m)^2}{4m}+2-4m=0$

$\Leftrightarrow 48m^2-24m+1=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{12}$.

Vậy $m=\dfrac{1}{2}, m=\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{12}$ là những giá trị cần tìm.

Câu 3. Tìm tham số m để đồ thị (Cm) của hàm số $y=x^3-4mx^2+7mx-3m$ tiếp xúc với parabol $(\mathrm{P}): \mathrm{y}=\mathrm{x}^2-\mathrm{x}+1$

A. $m\in\{2;-7;1\}$ **B.** $m\in\left\{5;-\dfrac{1}{4};78\right\}$ **C.** $m\in\left\{2;-\dfrac{3}{4};1\right\}$ **D.** $\in\left\{2;-\dfrac{1}{4};1\right\}$

✍***Bài làm:* 3.** (Cm) tiếp xúc với (P) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases} x_0^3-4mx_0^2+7mx_0-3m=x_0^2-x_0+1 & (1) \\ 3x_0^2-8mx_0+7m=2x_0-1 \end{cases}$ (A) có nghiệm x_0.

Giải hệ (A), (1) $\Leftrightarrow x_0^3-(4m+1)x_0^2+(7m+1)x_0-3m-1=0$

$\Leftrightarrow (x_0-1)(x_0^2-4mx_0+3m+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0^2-4mx_0+3m+1=0 \end{array}\right.$

Vậy (A) $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ 3x_0^2-2(4m+1)x_0+7m+1=0 \ (2) \end{cases} \vee \begin{cases} x_0^2-4mx_0+3m+1=0 \\ 3x_0^2-2(4m+1)x_0+7m+1=0 \ (2) \end{cases}$

Thay x_0 = 1 vào (2) ta được m = 2.

Hệ $\begin{cases} 3x_0^2-2(4m+1)x_0+7m+1=0 & (2) \\ x_0^2-4mx_0+3m+1=0 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0^2-2(4m+1)x_0+7m+1=0 & (2) \\ 3x_0^2-12mx_0+9m+3=0 & (4) \end{cases}$

Trừ hai phương trình (2) và (4) ,vế với vế ta được.

4m x_0 – 2 x_0 – 2m – 2 = 0 $\Leftrightarrow (2m-1)x_0=m+1$ (5).

Khi m = $\dfrac{1}{2}$ thì (5) trở thành 0 = 3/2 (sai) do đó (5) $\Leftrightarrow x_0=\dfrac{m+1}{2m-1}$.

Thay $x_0 = \dfrac{m+1}{2m-1}$ vào phương trình (3) ,ta được

$$\left(\frac{m+1}{2m-1}\right)^2 - 4m\left(\frac{m+1}{2m-1}\right) + 3m + 1 = 0$$

$\Leftrightarrow 4m^3 - 11m^2 + 5m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \vee m = -\dfrac{1}{4} \vee m = 1.$

Vậy các giá trị m cần tìm là m $\in \left\{2; -\dfrac{1}{4}; 1\right\}$.

Bài 16: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có đồ thị (C)

Câu 1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 1 = 0$.

A. $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}; y = \frac{3}{4}x + 1$ **B.** $y = \frac{3}{4}x - 3; y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$

C. $y = \frac{3}{4}x - 9; y = \frac{3}{4}x + 7$ **D.** $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}; y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến d với (C)

$$d: y = \frac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0^2 - x_0 + 1}{x_0 - 1}.$$

✍***Bài làm:* 1.** Vì d song song với đường thẳng $\Delta: y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$, nên ta có:

$\dfrac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0 - 1)^2} = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1, x_0 = 3$.

- $x_0 = -1$ phương trình tiếp tuyến: $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$.
- $x_0 = 3 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến: $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$.

Câu 2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) xuất phát từ $M(-1;3)$.

A. $y = 3x - 1; y = -3x$ **B.** $y = 13; y = -3x$ **C.** $y = 3; y = -3x + 1$ **D.** $y = 3; y = -3x$

✍***Bài làm:* 2.** Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến d với (C)

$$d: y = \frac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0^2 - x_0 + 1}{x_0 - 1}$$

Cách 1: $M \in d \Leftrightarrow 3 = \dfrac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0 - 1)^2}(-1 - x_0) + \dfrac{x_0^2 - x_0 + 1}{x_0 - 1}$

$\Leftrightarrow 3(x_0 - 1)^2 = (x_0^2 - 2x_0)(-x_0 - 1) + (x_0 - 1)(x_0^2 - x_0 + 1)$

$\Leftrightarrow 2x_0^2 - 5x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2, x_0 = \frac{1}{2}$.

- Với $x_0 = 2 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = 3$.
- Với $x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = -3x$.

Cách 2: Gọi d là đường thẳng đi qua $M(-1;3)$, có hệ số góc k, khi đó phương trình d có dạng: $y = k(x+1)+3$

d tiếp xúc đồ thị tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ phương trình sau có nghiệm x_0: $\begin{cases} \frac{x_0^2 - x_0 + 1}{x_0 - 1} = k(x_0+1)+3 & (1) \\ \frac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0-1)^2} = k & (2) \end{cases}$

Thế (2) vào (1) ta được: $\frac{x_0^2 - x_0 + 1}{x_0 - 1} = \frac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0-1)^2}(x_0+1)+3$

$\Leftrightarrow 2x_0^2 - 5x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2, x_0 = \frac{1}{2}$.

- Với $x_0 = 2 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = 3$.
- Với $x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow k = -3 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = -3x$.

Câu 3. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua giao điểm hai đường tiệm cận của (C).

A. $y = 2x - 1$ **B.** $y = 3x - 2$ **C.** $y = 4x - 3$ **D.**Không tồn tại

✍***Bài làm:*** **3.** Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến d với (C)

$d: y = \frac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0^2 - x_0 + 1}{x_0 - 1}$ Đồ thị có hai tiệm cận $x = 1$ và $y = x$ suy ra giao điểm của hai tiệm cận là $I(1;1)$.

Cách 1: $I \in d \Leftrightarrow 1 = \frac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0-1)^2}(1 - x_0) + \frac{x_0^2 - x_0 + 1}{x_0 - 1}$

$\Leftrightarrow x_0 - 1 = -x_0^2 + 2x_0 + x_0^2 - x_0 + 1 \Leftrightarrow 2 = 0$ vô nghiệm.

Vậy không có tiếp tuyến nào đi qua I.

Cách 2: Gọi d là đường thẳng đi qua I, có hệ số góc k

$\Rightarrow d: y = k(x-1)+1$

d là tiếp xúc với đồ thị tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases} \frac{x_0^2 - x_0 + 1}{x_0 - 1} = k(x_0 - 1) + 1 \\ \frac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0-1)^2} = k \end{cases}$ có nghiệm x_0

Thế k vào phương trình thứ hai ta được: $\frac{x_0^2 - x_0 + 1}{x_0 - 1} = \frac{x_0^2 - 2x_0}{x_0 - 1} + 1$

$\Leftrightarrow x_0^2 - x_0 + 1 = x_0^2 - 2x_0 + x_0 - 1$ phương trình vô nghiệm

Vậy qua I không có tiếp tuyến nào kẻ đến (C).

Bài 17:

Câu 1. Cho hàm số: $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C) và điểm $A\left(0;m\right)$. Xác định m để từ A kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm tương ứng nằm về hai phía đối với trục Ox.

A. $\begin{cases} m\neq 1 \\ m>-\dfrac{1}{3}\end{cases}$ **B.** $\begin{cases} m\neq 1 \\ m>-\dfrac{2}{5}\end{cases}$ **C.** $\begin{cases} m\neq 1 \\ m>-1\end{cases}$ **D.** $\begin{cases} m\neq 1 \\ m>-\dfrac{2}{3}\end{cases}$

Bài làm: **Cách 1:** Gọi điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$. Tiếp tuyến Δ tại M của (C) có phương trình $y=\dfrac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0+2}{x_0-1}$.

$A\in\Delta\Leftrightarrow m=\dfrac{3x_0}{(x_0-1)^2}+\dfrac{x_0+2}{x_0-1}\Leftrightarrow m(x_0-1)^2=3x_0+(x_0+2)(x_0-1)=0$ (với $x_0\neq 1$) $\Leftrightarrow(m-1)x_0^2-2(m+2)x_0+m+2=0$ (*).

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm a,b khác 1 sao cho

$\dfrac{(a+2)(b+2)}{(a-1)(b-1)}=\dfrac{ab+2(a+b)+4}{ab-(a+b)+1}<0$ hay là: $\begin{cases}\Delta'=3(m+2)>0\\ m-1\neq 0\\ -3m-2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\neq 1\\ m>-\dfrac{2}{3}\end{cases}$.

Vậy $\begin{cases} m\neq 1\\ m>-\dfrac{2}{3}\end{cases}$ là những giá trị cần tìm.

Cách 2: Đường thẳng d đi qua A, hệ số góc k có phương trình: $y=kx+m$.

d là tiếp xúc đồ thị tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases}\dfrac{x_0+2}{x_0-1}=kx_0+m\\ \dfrac{-3}{(x_0-1)^2}=k\end{cases}$ có nghiệm x_0. Thế k vào phương trình thứ nhất, ta được:

$\dfrac{x_0+2}{x_0-1}=\dfrac{-3x_0}{(x_0-1)^2}+m\Leftrightarrow(m-1)x_0^2-2(m+2)x_0+m+2=0$ (*).

Để từ A kẻ được hai tiếp tuyến thì (*) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=3(m+2)>0\\ m\neq 1\\ m-1-2(m+2)+m+2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m>-2\\ m\neq 1\end{cases}$ (i)

Khi đó tọa độ hai tiếp điểm là: $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ với x_1, x_2 là nghiệm của (*) và $y_1=\dfrac{x_1+2}{x_1-1}$; $y_2=\dfrac{x_2+2}{x_2-1}$

Để M_1, M_2 nằm về hai phía Ox thì $y_1.y_2<0\Leftrightarrow\dfrac{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}<0$ (1)

Áp dụng định lí Viet: $x_1+x_2=\dfrac{2(m+2)}{m-1}$; $x_1x_2=\dfrac{m+2}{m-1}$.

$\Rightarrow(1)\Leftrightarrow\dfrac{9m+6}{-3}<0\Leftrightarrow m>-\dfrac{2}{3}$.

Kết hợp với (i) ta có $\begin{cases} m>-\dfrac{2}{3}\\ m\neq 1\end{cases}$ là những giá trị cần tìm.

Câu 2. Tìm tham số m để đồ thị (C) : $y=-x^3+2(m+1)x^2-5mx+2m$ của hàm số tiếp xúc với trục hoành.

A. $m\in\left\{0;1;\frac{4}{3}\right\}$ **B.** $m\in\{0;1;2\}$ **C.** $m\in\left\{1;2;\frac{4}{3}\right\}$ **D.** $m\in\left\{0;1;2;\frac{4}{3}\right\}$

***Bài làm:* 2.** (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases}-x_0^3+2(m+1)x_0^2-5mx_0+2m=0\\-3x_0^2+4(m+1)x_0-5m=0\end{cases}$ (A) có nghiệm x_0.

Giải hệ (A).

$(A)\Leftrightarrow\begin{cases}(x_0-2)(x_0^2-2mx_0+m)=0\\3x_0^2-4(m+1)x_0+5m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=2\\3x_0^2-4(m+1)x_0+5m=0\ (1)\end{cases}$

Hoặc $\begin{cases}x_0^2-2mx_0+m=0\\3x_0^2-4(m+1)x_0+5m=0\end{cases}$ Thay $x_0=2$ vào (1) ta được $m=\frac{4}{3}$.

Hệ $\begin{cases}x_0^2-2mx_0+m=0\ (2)\\3x_0^2-4(m+1)x_0+5m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_0^2-6mx_0+3m=0\ (3)\\3x_0^2-4(m+1)x_0+5m=0\ (1)\end{cases}$

Trừ hai phương trình (1) và (3) , vế với vế ta được

$(m-2)x_0=-m\Leftrightarrow x_0=-\frac{m}{m-2}$.

Thay $x_0=-\frac{m}{m-2}$ vào (1), ta được : $\frac{m^2}{(m-2)^2}+\frac{2m^2}{m-2}+m=0$

$\Leftrightarrow m^3-3m^2+2m=0\Leftrightarrow m=0\vee m=1\vee m=2$. Vậy $m\in\left\{0;1;2;\frac{4}{3}\right\}$.

Câu 3. Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số y = $x^4-(m+1)x^2+4m$. Tìm tham số m để (C_m) tiếp xúc với đường thẳng (d): y = 3 tại hai điểm phân biệt .

A. m = 1 ∨ m = 3. **B.** m = 1 ∨ m = 16. **C.** m = 2 ∨ m = 13. **D.** m = 1 ∨ m = 13.

***Bài làm:* 3.** (C_m) tiếp xúc với (d) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases}x_0^4-(m+1)x_0^2+4m=3\ \ (1)\\4x_0^3-2(m+1)x_0=0\ \ (2)\end{cases}$ (A) có nghiệm x_0.

Giải hệ (A), (2) $\Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $x_0^2=\frac{m+1}{2}$

Thay $x_0=0$ vào (1) ta được m = $\frac{3}{4}$.

Thay $x_0^2=\frac{m+1}{2}$ vào (1) ta được $\left(\frac{m+1}{2}\right)^2-\frac{(m+1)^2}{2}+4m=3$

$\Leftrightarrow m^2-14m+13=0\Leftrightarrow m=1\vee m=13$.

Khi $m=\frac{3}{4}$ thì (C_m) tiếp xúc với (d) tại chỉ một điểm (0;3) nên $m=\frac{3}{4}$ không thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Khi m= 1 thì $x_0^2=1\Leftrightarrow x_0=\pm1$,suy ra (C_m) tiếp xúc với (d) tại hai điểm $(\pm1;3)$.

Khi m = 13 thì $x_0^2=7\Leftrightarrow x_0=\pm\sqrt{7}$,suy ra (C_m) tiếp xúc với (d) tại hai điểm $(\pm\sqrt{7};3)$. Vậy các giá trị m cần tìm là m = 1 ∨ m = 13.

Bài 18: Tìm tất cả các điểm trên Oy sao cho từ đó ta có thể vẽ được ít nhất một tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = x + \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$.

A. M(0;m) với $-2 < m \le 1$ **B.** M(0;m) với $-\frac{1}{2} < m \le 5$

C. M(0;m) với $-\frac{1}{2} < m \le 1$ **D.** M(0;m) với $-1 < m \le 5$

✍***Bài làm:*:** Xét $M(0;m) \in Oy$. Đường thẳng d đi qua M, hệ số góc k có phương trình: $y = kx + m$.

d là tiếp xúc đồ thị tại điểm có hoành đồ x_0 khi hệ $\begin{cases} x_0 + \sqrt{4x_0^2 + 2x_0 + 1} = kx_0 + m \\ 1 + \dfrac{4x_0 + 1}{\sqrt{4x_0^2 + 2x_0 + 1}} = k \end{cases}$ có nghiệm x_0.

Thay k vào phương trình thứ nhất ta được:

$$x_0 + \sqrt{4x_0^2 + 2x_0 + 1} = x_0 + \frac{4x_0^2 + x_0}{\sqrt{4x_0^2 + 2x_0 + 1}} + m \Leftrightarrow 4x_0^2 + 2x_0 + 1 = 4x_0^2 + x_0 + m\sqrt{4x_0^2 + 2x_0 + 1} \Leftrightarrow m = \frac{x_0 + 1}{\sqrt{4x_0^2 + 2x_0 + 1}} = f(x_0)$$

(*)

Để từ M kẻ được ít nhất một tiếp tuyến đến đồ thị $\Leftrightarrow$ (*) có ít nhất một nghiệm.

Xét hàm số f(x_0), ta có: $f'(x_0) = \dfrac{-3x_0}{(\sqrt{4x_0^2 + 2x_0 + 1})^3} \Rightarrow f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$

Mặt khác: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x_0) = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x_0) = -\frac{1}{2}$

Bảng biến thiên:

x_0	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x_0)$		+	0	−	
$f(x_0)$	$-\frac{1}{2}$	↗	1	↘	$\frac{1}{2}$

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \le 1$.

Vậy M(0;m) với $-\frac{1}{2} < m \le 1$ là những điểm cần tìm.

Bài 19: Cho hàm số: $y = -4x^3 + 3x + 2$, có đồ thị là (C).

Câu 1. Tìm a để phương trình $4x^3 - 3x + 2a^2 - 3a = 0$ có hai nghiệm âm và một nghiệm dương;

A. $0 < a < \frac{1}{2}$ hoặc $1 < a < 5$. **B.** $0 < a < 2$ hoặc $2 < a < 9$.

C. $0 < a < \frac{1}{2}$ hoặc $1 < a < \frac{3}{2}$. **D.** $0 < a < 4$ hoặc $6 < a < 89$.

✍***Bài làm:*** **1.** Phương trình: $4x^3 - 3x + 2a^2 - 3a = 0$ tương đương với phương trình : $-4x^3 + 3x + 2 = 2a^2 - 3a + 2$. Phương trình đã cho có hai nghiệm âm và một nghiệm dương khi và chỉ khi đường thẳng $y = 2a^2 - 3a + 2$ cắt đồ thị $y = -4x^3 + 3x + 2$ tại ba điểm trong đó có hai điểm có hoành độ âm và một điểm có hoành độ dương. Từ đồ thị suy ra: $1 < 2a^2 - 3a + 2 < 2$ tức ta có hệ: $\begin{cases} 0 < 2a^2 - 3a + 1 \\ 2a^2 - 3a < 0 \end{cases}$ hay $0 < a < \frac{1}{2}$ hoặc $1 < a < \frac{3}{2}$.

Câu 2. Tìm những điểm trên đường thẳng $y=3$ để từ đó có thể vẽ được ba đường thẳng tiếp xúc với đồ thị (C).

A. $m<-1$ hoặc $\frac{1}{3}<m\neq 2$ **B.** $m<-1$ hoặc $\frac{1}{3}<m\neq\frac{1}{2}$

C. $m<-2$ hoặc $\frac{1}{3}<m\neq\frac{1}{2}$ **D.** $m<-3$ hoặc $1<m\neq\frac{1}{2}$

Bài làm: **2.** Giả sử $M(m;3)$ là điểm cần tìm và d là đường thẳng qua M có hệ số góc là k, phương trình có dạng: $y=k(x-m)+3$.

Đường thẳng d tiếp xúc với đồ thị (C) tại điểm $N(x_0;y_0)$ khi hệ :

$\begin{cases}-4x_0^3+3x_0+2=k(x_0-m)+3\\(-4x_0^3+3x_0+2)'=[k(x_0-m)+3]'\end{cases}$ có nghiệm x_0, từ hệ suy ra

$(2x_0-1)\left[4x_0^2-2(3m-1)x_0-3m+1\right]=0$ (1) có nghiệm x_0.

Qua M kẻ được 3 đường thẳng tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi phương trình (1) có 3 nghiệm x_0, tức phương trình $4x_0^2-2(3m-1)x_0-3m+1=0$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác $\frac{1}{2}$ hay $m<-1$ hoặc $\frac{1}{3}<m\neq\frac{1}{2}$.

Bài 20:

Câu 1. Tìm tham số m để đồ thị hàm số (C_m): $y=\frac{x^2-x+m}{x-1}$ với $m\neq 0$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt A,B sao cho tiếp tuyến tại 2 điểm A,B vuông góc với nhau.

A. $m=-\frac{1}{5}$ **B.** $m=-\frac{1}{3}$ **C.** $m=\frac{1}{5}$ **D.** $m=-\frac{4}{7}$

Bài làm: **1.** Hàm số cắt trục hoành thại hai điểm phân biệt A,B có hệ số góc là $k=\frac{2x+1}{x+1}$.

Ta có: $y'=\frac{x^2+2x-m-1}{(x+1)^2}$, đặt $g(x)=x^2+2x-m-1$.

Theo bài toán, $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1.

Theo đề, tiếp tuyến tại A và B vuông góc nhau tức $k_A.k_B=-1$, tìm được $m=-\frac{1}{5}$.

Câu 2. Cho hàm số $y=\frac{2x^2}{x+2}$ có đồ thị là (C). Tìm trên đường thẳng $y=x$ những điểm mà từ đó có thể kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C), đồng thời 2 tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

A. $m=-5\pm\sqrt{3}$ **B.** $m=-5\pm\sqrt{53}$ **C.** $m=-6\pm\sqrt{23}$ **D.** $m=-5\pm\sqrt{23}$

Bài làm: **2.** Đường thẳng (d) đi qua điểm $M(m;m)$ có hệ số góc là k, phương trình có dạng: $y=k(x-m)+m$.

(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ : $\begin{cases}\frac{2x_0^2}{x_0+2}=k(x_0-m)+m\\\frac{2x_0^2+8x_0}{(x_0+2)^2}=k\end{cases}$ có nghiệm x_0, từ đây ta tìm được $m=-5\pm\sqrt{23}$

NGUYỄN BẢO VƯƠNG

TỔNG BIÊN SOẠN VÀ TỔNG HỢP

250 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐẠO HÀM TỰ LUYỆN

TẬP 3. CHƯƠNG V. ĐẠO HÀM LỚP 11

GIÁO VIÊN MUỐN MUA FILE WORD LIÊN HỆ 0946798489 ĐỂ GẶP THẦY VƯƠNG, HOẶC LIÊN HỆ QUA:

LINK FACEBOOK Nguyễn Vương: https://www.facebook.com/phong.baovuong

TÀI LIỆU CHIA SẺ TẠI: http://tailieutoanhoc.vn/

Page: https://web.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/?ref=bookmarks

Gmail: baovuong7279@gmail.com

Mục lục

Tổng hợp lần 1. CHƯƠNG V: ĐẠO HÀM

BÀI 1: ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

Câu 1. Cho hàm số f(x) liên tục tại x_0. Đạo hàm của f(x) tại x_0 là:

A. $f(x_0)$

B. $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn)

D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn)

Câu 2. Cho hàm số f(x) là hàm số trên R định bởi f(x) = x^2 và $x_0 \in$R. Chọn câu đúng:

A. $f'(x_0) = x_0$ **B.** $f'(x_0) = x_0^2$ **C.** $f'(x_0) = 2x_0$ **D.** $f'(x_0)$ không tồn tại.

Câu 3. Cho hàm số f(x) xác định trên $(0;+\infty)$ bởi f(x) = $\dfrac{1}{x}$. Đạo hàm của f(x) tại $x_0 = \sqrt{2}$ là:

A. $\dfrac{1}{2}$ **B**$-\dfrac{1}{2}$ **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **D.** $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 4. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị của hàm số y = $(x+1)^2(x–2)$ tại điểm có hoành độ x = 2 là:

A. y = –8x + 4 **B.** y = –9x + 18 **C.** y = –4x + 4 **D.** y = –8x + 18

Câu 5. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị của hàm số y = $x(3–x)^2$ tại điểm có hoành độ x = 2 là

A. y = –12x + 24 **B.** y = –12x + 26 **C.** y = 12x –24 **D.** y = 12x –26

Câu 6. Điểm M trên đồ thị hàm số y = $x^3 – 3x^2 – 1$ mà tiếp tuyến tại đó có hệ số góc k bé nhất trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị thì M, k là:

A. M(1; –3), k = –3 **B.** M(1; 3), k = –3 **C.** M(1; –3), k = 3 **D.** M(–1; –3), k = –3

Câu 7. Cho hàm số y = $\dfrac{ax+b}{x-1}$ có đồ thị cắt trục tung tại A(0; –1), tiếp tuyến tại A có hệ số góc k = –3. Các giá trị của a, b là:

A. a = 1; b=1 **B.** a = 2; b=1 **C.** a = 1; b=2 **D.** a = 2; b=2

Câu 8. Cho hàm số y = $\dfrac{x^2-2mx+m}{x-1}$. Giá trị m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại hai điểm và tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm đó vuông góc là:

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 7

Câu 9. Cho hàm số y = $\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$ và xét các phương trình tiếp tuyến có hệ số góc k = 2 của đồ thị hàm số là:

A. y = 2x–1, y = 2x–3 **B.** y = 2x–5, y = 2x–3 **C.** y = 2x–1, y = 2x–5 **D.** y = 2x–1, y = 2x+5

Câu 10. Cho hàm số y = $\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$, tiếp tuyến của đồ thị hàm số vuông góc với đường thẳng 3y – x + 6 là:

A. y = –3x – 3; y= –3x– 4 **B.** y = –3x – 3; y= –3x + 4 **C.** y = –3x + 3; y= –3x–4 **D.** y = –3x–3; y=3x–4

Câu 11. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số y = $(2m - 1)x^4 - m + \frac{5}{4}$ tại điểm có hoành độ x = –1 vuông góc với đường thẳng 2x – y – 3 = 0

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $-\frac{1}{6}$ **D.** $\frac{5}{6}$

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$, tiếp tuyến của đồ thị hàm số kẻ từ điểm (–6; 4) là:

A. y = –x–1, y = $\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$ **B.** y= –x–1, y =$-\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$

C. y = –x+1, y =$-\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$ **D.** y= –x+1, y = $-\frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$

Câu 13. Tiếp tuyến kẻ từ điểm (2; 3) tới đồ thị hàm số $y = \frac{3x+4}{x-1}$ là:

A. y = 3x; y = x+1 **B.** y = –3x; y = x+1 **C.** y = 3; y = x–1 **D.** y = 3–x; y = x+1

Câu 14. Cho hàm số y = $x^3 - 6x^2 + 7x + 5$ (C), trên (C) những điểm có hệ số góc tiếp tuyến tại điểm nào bằng 2?

A. (–1; –9); (3; –1) **B.** (1; 7); (3; –1) **C.** (1; 7); (–3; –97) **D.** (1; 7); (–1; –9)

Câu 15. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị y = tanx tại điểm có hoành độ x = $\frac{\pi}{4}$:

A. k = 1 **B.** k = $\frac{1}{2}$ **C.** k = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** 2

Câu 16. Cho đường cong (C): y = x^2. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M(–1; 1) là:

A. y = –2x + 1 **B.** y = 2x + 1 **C.** y = –2x – 1 **D.** y = 2x – 1

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{x^2+x}{x-2}$. Phương trình tiếp tuyến tại A(1; –2) là:

A. y = –4(x–1) – 2 **B.** y = –5(x–1) + 2 **C.** y = –5(x–1) – 2 **D.** y = –3(x–1) – 2

Câu 18. Cho hàm số y = $\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 7x + 2$. Phương trình tiếp tuyến tại A(0; 2) là:

A. y = 7x +2 **B.** y = 7x – 2 **C.** y = –7x + 2 **D.** y = –7x –2

Câu 19. Gọi (P) là đồ thị hàm số y = $2x^2 - x + 3$. Phương trình tiếp tuyến với (P) tại điểm mà (P) cắt trục tung là:

A. y = –x + 3 **B.** y = –x – 3 **C.** y = 4x – 1 **D.** y = 11x + 3

Câu 20. Đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{3x+1}{x-1}$ cắt trục tung tại điểm **A.** Tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình là:

A. y = –4x – 1 **B.** y = 4x – 1 **C.** y = 5x –1 **D.** y = – 5x –1

Câu 21. Gọi (C) là đồ thị của hàm số y = x^4 + x. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng d: x + 5y = 0 có phương trình là:

A. y = 5x – 3 **B.** y = 3x – 5 **C.** y = 2x – 3 **D.** y = x + 4

BÀI 2: QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

Câu 22. Cho hàm số $y = \frac{x^2+x}{x-2}$ đạo hàm của hàm số tại x = 1 là:

A. $y'(1) = -4$ **B.** $y'(1) = -5$ **C.** $y'(1) = -3$ **D.** $y'(1) = -2$

Câu 23. Cho hàm số $y=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. $y'(0)$ bằng:

A. $y'(0)=\frac{1}{2}$ **B.** $y'(0)=\frac{1}{3}$ **C.** $y'(0)=1$ **D.** $y'(0)=2$

Câu 24. Cho hàm số f(x) xác định trên R bởi f(x) = $\sqrt{x^2}$. Giá trị $f'(0)$ bằng:

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** Không tồn tại

Câu 25. Đạo hàm cấp 1của hàm số $y = (1–x^3)^5$ là:

A. $y' = 5(1–x^3)^4$ **B.** $y' = –15(1–x^3)^4$ **C.** $y' = –3(1–x^3)^4$ **D.** $y' = –5(1–x^3)^4$

Câu 26. Đạo hàm của hàm số $f(x) = (x^2 + 1)^4$ tại điểm x = –1 là:

A. –32 **B.** 30 **C.** –64 **D.** 12

Câu 27. Hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ có đạo hàm là:

A. $y' = 2$ **B.** $y'=-\frac{1}{(x-1)^2}$ **C.** $y'=-\frac{3}{(x-1)^2}$ **D.** $y'=\frac{1}{(x-1)^2}$

Câu 28. Hàm số $\frac{1}{3}x\sqrt[3]{x}$ có đạo hàm là:

A. $y'=\frac{-x^2+2x}{(1-x)^2}$ **B.** $y'=\frac{x^2-2x}{(1-x)^2}$ **C.** $y' = –2(x – 2)$ **D.** $y'=\frac{x^2+2x}{(1-x)^2}$

Câu 29. Cho hàm số f(x) = $\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2$. Đạo hàm của hàm số f(x) là:

A. $f'(x)=\frac{-2(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^3}$ **B.** $f'(x)=\frac{-2(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}$ **C.** $f'(x)=\frac{2(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ **D.** $f'(x)=\frac{2(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})}$

Câu 30. Cho hàm số $y = x^3 – 3x^2 – 9x – 5$. Phương trình $y' = 0$ có nghiệm là:

A. {–1; 2} **B.** {–1; 3} **C.** {0; 4} **D.** {1; 2}

Câu 31. Cho hàm số f(x) xác định trên R bởi $f(x) = 2x^2 + 1$. Giá trị $f'(–1)$ bằng:

A. 2 **B.** 6 **C.** –6 **D.** 3

Câu 32. Cho hàm số f(x) xác định trên R bởi f(x) $=\sqrt[3]{x}$ .Giá trị $f'(–8)$ bằng:

A. $\frac{1}{12}$ **B.** $-\frac{1}{12}$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** $-\frac{1}{6}$

Câu 33. Cho hàm số f(x) xác định trên R \{1} bởi $f(x)=\frac{2x}{x-1}$. Giá trị $f'(–1)$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{1}{2}$ **C.** –2 **D.** Không tồn tại

Câu 34. Cho hàm số f(x) xác định bởi $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ bằng:

A. 0 **B.** 1 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** Không tồn tại.

Câu 35. Cho hàm số f(x) xác định trên R bởi f(x) = ax + b, với a, b là hai số thực đã cho. chọn câu đúng:

A. $f'(x) = a$ **B.** $f'(x) = -a$ **C.** $f'(x) = b$ **D.** $f'(x) = -b$

Câu 36. Cho hàm số f(x) xác định trên R bởi $f(x) = -2x^2 + 3x$. Hàm số có đạo hàm $f'(x)$ bằng:

A. $-4x - 3$ **B.** $-4x + 3$ **C.** $4x + 3$ **D.** $4x - 3$

Câu 37. Cho hàm số f(x) xác định trên $D=[0;+\infty)$ cho bởi $f(x) = x\sqrt{x}$ có đạo hàm là:

A. $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ **B.** $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ **C.** $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{x}$ **D.** $f'(x) = \sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}$

Câu 38. Cho hàm số $f(x)=k\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\ (k\in R)$. Để $f'(1)=\frac{3}{2}$ thì ta chọn:

A. k = 1 **B.** k = –3 **C.** k = 3 **D.** $k = \frac{9}{2}$

Câu 39. Hàm số $f(x) = \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ xác định trên $D=(0;+\infty)$. Có đạo hàm của f là:

A. $f'(x) = x + \frac{1}{x} - 2$ **B.** $f'(x) = x - \frac{1}{x^2}$ **C.** $f'(x) = \sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ **D.** $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$

Câu 40. Hàm số $f(x) = \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$ xác định trên $D=(0;+\infty)$. Đạo hàm của hàm f(x) là:

A. $f'(x) = \frac{3}{2}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)$ **B.** $f'(x) = \frac{3}{2}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)$

C. $f'(x) = \frac{3}{2}\left(-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)$ **D.** $f'(x) = x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}$

Câu 41. Cho hàm số $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ xác định trên R. Giá trị $f'(-1)$ bằng:

A. 4 **B.** 14 **C.** 15 **D.** 24

Câu 42. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ xác định R\{1}. Đạo hàm của hàm số f(x) là:

A. $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ **B.** $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$ **C.** $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ **D.** $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$

Câu 43. Cho hàm số $f(x) = -1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ xác định R^*. Đạo hàm của hàm số f(x) là:

A. $f'(x) = -\frac{1}{3}x\sqrt[3]{x}$ **B.** $f'(x) = \frac{1}{3}x\sqrt[3]{x}$ **C.** $f'(x) = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$ **D.** $f'(x) = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x^2}}$

Câu 44. Với $f(x)=\frac{x^2-2x+5}{x-1}$. $f'(x)$ bằng:

A. 1 **B.** –3 **C.** –5 **D.** 0

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. Tính y/(0) bằng:

A. y/(0)= $\frac{1}{2}$ **B.** y/(0)= $\frac{1}{3}$ **C.** y/(0)=1 **D.** y/(0)=2

Câu 46. Cho hàm số y = $\frac{x^2+x}{x-2}$, đạo hàm của hàm số tại x = 1 là:

A. y/(1)= –4 **B.** y/(1)= –3 **C.** y/(1)= –2 **D.** y/(1)= –5

BÀI 3: ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Câu 47. Hàm số y = sinx có đạo hàm là:

A. y/ = cosx **B.** y/ = – cosx **C.** y/ = – sinx **D.** $y' = \frac{1}{\cos x}$

Câu 48. Hàm số y = cosx có đạo hàm là:

A. y/ = sinx **B.** y/ = – sinx **C.** y/ = – cosx **D.** $y' = \frac{1}{\sin x}$

Câu 49. Hàm số y = tanx có đạo hàm là:

A. y/ = cotx **B.** y/ = $\frac{1}{\cos^2 x}$ **C.** y/ = $\frac{1}{\sin^2 x}$ **D.** y/ = 1 – $\tan^2$x

Câu 50. Hàm số y = cotx có đạo hàm là:

A. y/ = – tanx **B.** y/ = $-\frac{1}{\cos^2 x}$ **C.** y/ = $-\frac{1}{\sin^2 x}$ **D.** y/ = 1 + $\cot^2$x

Câu 51. Hàm số y = $\frac{1}{2}$(1+ tanx)^2 có đạo hàm là:

A. y/ = 1+ tanx **B.** y/ = (1+tanx)^2 **C.** y/ = (1+tanx)(1+tanx)^2 **D.** y/ = 1+$\tan^2$x

Câu 52. Hàm số y = $\sin^2$x.cosx có đạo hàm là:

A. y/ = sinx(3$\cos^2$x – 1) **B.** y/ = sinx(3$\cos^2$x + 1) **C.** y/ = sinx($\cos^2$x + 1) **D.** y/ = sinx($\cos^2$x – 1)

Câu 53. Hàm số y = $\frac{\sin x}{x}$ có đạo hàm là:

A. $y' = \frac{x\cos x + \sin x}{x^2}$ **B.** $y' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ **C.** $y' = \frac{x\sin x + \cos x}{x^2}$ **D.** $y' = \frac{x\sin x - \cos x}{x^2}$

Câu 54. Hàm số y = x^2.cosx có đạo hàm là:

A. y/ = 2xcosx – x^2sinx **B.** y/ = 2xcosx + x^2sinx **C.** y/ = 2xsinx – x^2cosx **D.** y/ = 2xsinx + x^2cosx

Câu 55. Hàm số y = tanx – cotx có đạo hàm là:

A. y/ = $\frac{1}{\cos^2 2x}$ **B.** y/ = $\frac{4}{\sin^2 2x}$ **C.** y/ = $\frac{4}{\cos^2 2x}$ **D.**) y/ = $\frac{1}{\sin^2 2x}$

Câu 56. Hàm số y = $2\sqrt{\sin x}-2\sqrt{\cos x}$ có đạo hàm là:

A. $y' = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} - \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$ **B.** $y' = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$

C. $y' = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} - \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$ **D.** $y' = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} + \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$

Câu 57. Hàm số y = f(x) = $\frac{2}{\cos(\pi x)}$ có f'(3) bằng:

A. 2π **B.** $\frac{8\pi}{3}$ **C.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ **D.** 0

Câu 58. Hàm số y = $\tan^2\frac{x}{2}$ có đạo hàm là:

A. $y' = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}$ **B.** $y' = \frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}}$ **C.** $y' = \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos^3\frac{x}{2}}$ **D.** $y' = \tan^3\frac{x}{2}$

Câu 59. Hàm số y = $\sqrt{\cot 2x}$ có đạo hàm là:

A. $y' = \frac{1+\cot^2 2x}{\sqrt{\cot 2x}}$ **B.** $y' = \frac{-(1+\cot^2 2x)}{\sqrt{\cot 2x}}$ **C.** $y' = \frac{1+\tan^2 2x}{\sqrt{\cot 2x}}$ **D.** $y' = \frac{-(1+\tan^2 2x)}{\sqrt{\cot 2x}}$

Câu 60. Cho hàm số y = cos3x.sin2x. $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ bằng:

A. $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$ **B.** $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$ **C.** $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ **D.** $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Câu 61. Cho hàm số y = $\frac{\cos 2x}{1-\sin x}$. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ bằng:

A. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ **B.** $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1$ **C.** $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$ **D.** $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2$

Câu 62. Xét hàm số f(x) = $\sqrt[3]{\cos 2x}$. Chọn câu ***sai***:

A. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ **B.** $f'(x) = \frac{-2\sin 2x}{3\sqrt[3]{\cos^2 2x}}$ **C.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ **D.** $3.y^2.y' + 2\sin 2x = 0$

Câu 63. Cho hàm số y = f(x) = $\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}$. Giá trị $f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right)$ bằng:

A. 0 **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $\frac{2}{\pi}$ **D.** $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

Câu 64. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{\tan x + \cot x}$. Giá trị $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ bằng:

A. $\sqrt{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** 0 **D.** $\frac{1}{2}$

Câu 65. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ Giá trị $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng:

A. 1 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** 0 **D.** Không tồn tại.

Câu 66. Xét hàm số $y=f(x)=2\sin\left(\frac{5\pi}{6}+x\right)$ Giá trị $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ bằng:

A. –1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** –2

Câu 67. Cho hàm số $y=f(x)=\tan\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$ Giá trị $f'(0)$ bằng:

A. 4 **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $-\sqrt{3}$ **D.** 3

Câu 68. Cho hàm số $y=f(x)=2\sin\sqrt{x}$. Đạo hàm của hàm số y là:

A. $y'=2\cos\sqrt{x}$ **B.** $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$ **C.** $y'=2\sqrt{x}\cos\frac{1}{\sqrt{x}}$ **D.** $y'=\frac{1}{\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}$

Câu 69. Cho hàm số y = cos3x.sin2x. Tính $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ bằng:

A. $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1$ **B.** $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ **C.** $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ **D.** $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$

Câu 70. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{\cos x}{1-\sin x}$ Tính $y'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ bằng:

A. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$ **B.** $y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-1$ **C.** $y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$ **D.** $y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2$

BÀI 4: VI PHÂN

Câu 71. Cho hàm số y = f(x) = $(x-1)^2$. Biểu thức nào sau đây chỉ vi phân của hàm số f(x)?

A. dy = 2(x – 1)dx **B.** dy = $(x-1)^2$dx **C.** dy = 2(x–1) **D.** dy = (x–1)dx

Câu 72. Xét hàm số y = f(x) = $\sqrt{1+\cos^2 2x}$. Chọn câu đúng:

A. $df(x)=\frac{-\sin 4x}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$ **B.** $df(x)=\frac{-\sin 4x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$

C. $df(x)=\frac{\cos 2x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$ **D.** $df(x)=\frac{-\sin 2x}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$

Câu 73. Cho hàm số y = x^3 – 5x + 6. Vi phân của hàm số là:

A. dy = $(3x^2-5)$dx **B.** dy = $-(3x^2-5)$dx **C.** dy = $(3x^2+5)$dx **D.** dy = $(-3x^2+5)$dx

Câu 74. Cho hàm số y = $\frac{1}{3x^3}$. Vi phân của hàm số là:

A. $dy=\frac{1}{4}dx$ **B.** $dy=\frac{1}{x^4}dx$ **C.** $dy=-\frac{1}{x^4}dx$ **D.** $dy=x^4dx$

Câu 75. Cho hàm số y = $\frac{x+2}{x-1}$. Vi phân của hàm số là:

A. $dy=\frac{dx}{(x-1)^2}$ **B.** $dy=\frac{3dx}{(x-1)^2}$ **C.** $dy=\frac{-3dx}{(x-1)^2}$ **D.** $dy=-\frac{dx}{(x-1)^2}$

Câu 76. Cho hàm số y = $\frac{x^2+x+1}{x-1}$. Vi phân của hàm số là:

A. $dy=-\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}dx$ **B.** $dy=\frac{2x+1}{(x-1)^2}dx$ **C.** $dy=-\frac{2x+1}{(x-1)^2}dx$ **D.** $dy=\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}dx$

Câu 77. Cho hàm số y = x^3 – $9x^2$ + 12x–5. Vi phân của hàm số là:

A. dy = ($3x^2$ – 18x+12)dx **B.** dy = (–$3x^2$ – 18x+12)dx
C. dy = –($3x^2$ – 18x+12)dx **D.** dy = (–$3x^2$ + 18x–12)dx

Câu 78. Cho hàm số y = sinx – 3cosx. Vi phân của hàm số là:

A. dy = (–cosx+ 3sinx)dx **B.** dy = (–cosx–3sinx)dx
C. dy = (cosx+ 3sinx)dx **D.** dy = –(cosx+ 3sinx)dx

Câu 79. Cho hàm số y = $\sin^2$x. Vi phân của hàm số là:

A. dy = –sin2xdx **B.** dy = sin2xdx **C.** dy = sinxdx **D.** dy = 2cosxdx

Câu 80. Vi phân của hàm số $y=\frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ là:

A. $dy=\frac{2\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}dx$ **B.** $dy=\frac{\sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}dx$

C. $dy=\frac{2\sqrt{x}-\sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}dx$ **D.** $dy=-\frac{2\sqrt{x}-\sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}dx$

Câu 81. Hàm số y = xsinx + cosx có vi phân là:

A. dy = (xcosx – sinx)dx **B.** dy = (xcosx)dx
C. dy = (cosx – sinx)dx **D.** dy = (xsinx)dx

Câu 82. Hàm số y = $\frac{x}{x^2+1}$. Có vi phân là:

A. $dy=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}dx$ **B.** $dy=\frac{2x}{(x^2+1)}dx$ **C.** $dy=\frac{1-x^2}{(x^2+1)}dx$ **D.** $dy=\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$

BÀI 5: ĐẠO HÀM CẤP CAO

Câu 83. Hàm số $y=\frac{x}{x-2}$ có đạo hàm cấp hai là:

A. $y''=0$ **B.** $y''=\frac{1}{(x-2)^2}$ **C.** $y''=-\frac{4}{(x-2)^2}$ **D.** $y''=\frac{4}{(x-2)^2}$

Câu 84. Hàm số y = $(x^2 + 1)^3$ có đạo hàm cấp ba là:

A. y''' = 12(x^2 + 1) **B.** y''' = 24(x^2 + 1) **C.** y''' = 24($5x^2$ + 3) **D.** y''' = –12(x^2 + 1)

Câu 85. Hàm số y = $\sqrt{2x+5}$ có đạo hàm cấp hai bằng:

A. $y'' = \frac{1}{(2x+5)\sqrt{2x+5}}$ **B.** $y'' = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$

C. $y'' = -\frac{1}{(2x+5)\sqrt{2x+5}}$ **D.** $y'' = -\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$

Câu 86. Hàm số y = $\frac{x^2+x+1}{x+1}$ có đạo hàm cấp 5 bằng:

A. $y^{(5)} = -\frac{120}{(x+1)^5}$ **B.** $y^{(5)} = \frac{120}{(x+1)^5}$ **C.** $y^{(5)} = \frac{1}{(x+1)^5}$ **D.** $y^{(5)} = -\frac{1}{(x+1)^5}$

Câu 87. Hàm số y = $x\sqrt{x^2+1}$ có đạo hàm cấp hai bằng:

A. $y'' = -\frac{2x^3+3x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ **B.** $y'' = \frac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}$

C. $y'' = \frac{2x^3+3x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ **D.** $y'' = -\frac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}$

Câu 88. Cho hàm số f(x) = $(2x+5)^5$. Có đạo hàm cấp 3 bằng:

A. $f'''(x) = 80(2x+5)^3$ **B.** $f'''(x) = 480(2x+5)^2$

C. $f'''(x) = -480(2x+5)^2$ **D.** $f'''(x) = -80(2x+5)^3$

Câu 89. Đạo hàm cấp 2 của hàm số y = tanx bằng:

A. $y'' = -\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$ **B.** $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$ **C.** $y'' = -\frac{1}{\cos^2 x}$ **D.** $y'' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$

Câu 90. Cho hàm số y = sinx. Chọn câu ***sai***:

A. $y' = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ **B.** $y'' = \sin(x+\pi)$ **C.** $y''' = \sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$ **D.** $y^{(4)} = \sin(2\pi - x)$

Câu 91. Cho hàm số y = f(x) = $\frac{-2x^2+3x}{1-x}$. Đạo hàm cấp 2 của f(x) là:

A. $y'' = 2+\frac{1}{(1-x)^2}$ **B.** $y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$ **C.** $y'' = \frac{-2}{(1-x)^3}$ **D.** $y'' = \frac{2}{(1-x)^4}$

Câu 92. Xét hàm số y = f(x) = $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. Phương trình $f^{(4)}(x) = -8$ có nghiệm $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $x = \frac{\pi}{2}$ **B.** x = 0 và $x = \frac{\pi}{6}$ **C.** x = 0 và $x = \frac{\pi}{3}$ **D.** x = 0 và $x = \frac{\pi}{2}$

Câu 93. Cho hàm số y = sin2x. Hãy chọn câu đúng:

A. $4y - y'' = 0$ **B.** $4y + y'' = 0$ **C.** $y = y'\tan 2x$ **D.** $y^2 = (y')^2 = 4$

Câu 94. Cho hàm số y = f(x) = $-\frac{1}{x}$ xét 2 mệnh đề:

(I): $y'' = f''(x) = \frac{2}{x^3}$ (II): $y''' = f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$.

Mệnh đề nào đúng:

A. Chỉ (I) **B.** Chỉ (II) đúng **C.** Cả hai đều đúng **D.** Cả hai đều sai.

Câu 95. Nếu $f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$, thì f(x) bằng:

A. $\frac{1}{\cos x}$ **B.** $-\frac{1}{\cos x}$ **C.** cotx **D.** tanx

Câu 96. Cho hàm số f(x) = $\frac{-x^2+x+2}{x-1}$ xác định trên D = R\{1}. Xét 2 mệnh đề:

(I): $y' = f'(x) = -1-\frac{2}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$, (II): $y'' = f''(x) = \frac{4}{(x-1)^2} > 0, \forall x \neq 1$

Chọn mệnh đề đúng:

A. Chỉ có (I) đúng **B.** Chỉ có (II) đúng **C.** Cả hai đều đúng **D.** Cả hai đều sai.

Câu 97. Cho hàm số f(x) = $(x+1)^3$. Giá trị $f''(0)$ bằng:

A. 3 **B.** 6 **C.** 12 **D.** 24

Câu 98. Với $f(x) = \sin^3 x + x^2$ thì $f''\left(=\frac{\pi}{2}\right)$ bằng:

A. 0 **B.** 1 **C.** –2 **D.** 5

Câu 99. Giả sử h(x) = $5(x+1)^3 + 4(x + 1)$. Tập nghiệm của phương trình $h''(x) = 0$ là:

A. [–1; 2] **B.** (–∞; 0] **C.** {–1} **D.** ∅

Câu 100. Cho hàm số $y = \frac{1}{x-3}$. Tính $y^{(3)}(1)$ có kết quả bằng:

A. $y^{(3)}(1) = \frac{3}{8}$ **B.** $y^{(3)}(1) = \frac{1}{8}$ **C.** $y^{(3)}(1) = -\frac{3}{8}$ **D.** $y^{(3)}(1) = -\frac{1}{4}$

Câu 101. Cho hàm số y = f(x) = $(ax+b)^5$ (a, b là tham số). Tính $f^{(10)}(1)$

A. $f^{(10)}(1)=0$ **B.** $f^{(10)}(1) = 10a + b$ **C.** $f^{(10)}(1) = 5a$ **D.** $f^{(10)}(1)= 10a$

Câu 102. Cho hàm số y = sin2x.cosx. Tính $y^{(4)}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ có kết quả là:

A. $\frac{1}{2}\left(3^4+\frac{1}{2}\right)$ **B.** $\frac{1}{2}\left(3^4-\frac{1}{2}\right)$ **C.** $\frac{1}{2}\left(-3^4+\frac{1}{2}\right)$ **D.** $-\frac{1}{2}\left(3^4+\frac{1}{2}\right)$

Tổng hợp lần 2. CHƯƠNG V. ĐẠO HÀM

Câu 1. Số gia của hàm số $y = x^2+2$ tại điểm $x_0 = 2$ ứng với số gia $\Delta x = 1$ bằng bao nhiêu?

A. 13 **B.** 9 **C.** 5 **D.** 2

Câu 2. Số gia của hàm số $y = x^2-1$ tại điểm $x_0 = 2$ ứng với số gia $\Delta x = 0,1$ bằng bao nhiêu?

A. – 0, 01 **B.** 0,21 **C.** 0,99 **D.** 11,1

Câu 3. Đạo hàm của hàm số $y = 2x^3-(4x^2-3)$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $6x^2-8x-3$. **B.** $6x^2-8x+3$.

C. $2(3x^2-4x)$. **D.** $2(3x^2-8x)$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=x^3-x^2-3x$. Giá trị $f'(-1)$ bằng bao nhiêu?

A. -2.
B. -1.
C. 0.
D. 2.

Câu 5. Cho hàm số $g(x)=9x-\frac{3}{2}x^2$. Đạo hàm của hàm số g(x) dương trong trường hợp nào?

A. $x<3$.
B. $x<6$.
C. $x>3$.
D. $x<-3$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+3$. Đạo hàm của hàm số f(x) dương trong trường hợp nào?

A. $x<0 \vee x>1$.
B. $x<0 \vee x>2$.
C. $0<x<2$.
D. $x<1$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=\frac{4}{5}x^5-6$. Số nghiệm của phương trình $f'(x)=4$ là bao nhiêu?

A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. Nhiều hơn 2 nghiệm.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=\frac{2}{3}x^3-1$. Số nghiệm của phương trình $f'(x)=-2$ là bao nhiêu?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)=x^4-2x$. Phương trình $f'(x)=2$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 10. Cho hai hàm số $f(x)=x^2+5$; $g(x)=9x-\frac{3}{2}x^2$. Giá trị của x là bao nhiêu để $f'(x)=g'(x)$?

A. -4. **B.** 4. **C.** $\frac{4}{5}$. **D.** $\frac{5}{4}$.

Câu 11. Hàm số nào sau đây có đạo hàm bằng $2(3x+1)$?

A. $2x^3+2x$.
B. $3x^2+2x+5$.
C. $3x^2+x+5$.
D. $(3x+1)^2$

Câu 12. Hàm số nào sau đây có đạo hàm bằng $3(2x+1)$?

A. $\frac{3}{2}(2x+1)^2$.
B. $3x^2+x$.
C. $3x(x+1)$.
D. $2x^3+3x$

Câu 13. Cho hàm số $f(x)=2x^3+3x^2-36x-1$. Để $f'(x)=0$ thì x có giá trị thuộc tập hợp nào?

A. $\{-3;2\}$.
B. $\{3;-2\}$.
C. $\{-6;4\}$.
D. $\{4;-6\}$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=x^3+2x^2-7x+5$. Để $f'(x)=0$ thì x có giá trị thuộc tập hợp nào?

A. $\left[-\frac{7}{3};1\right]$.
B. $\left\{-1;\frac{7}{3}\right\}$.
C. $\left(-\frac{7}{3};1\right)$.
D. $\left\{1;-\frac{7}{3}\right\}$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=x^3+2x^2-7x+3$. Để $f'(x)\le 0$ thì x có giá trị thuộc tập hợp nào?

A. $\left[-\frac{7}{3};1\right]$. **B.** $\left[-1;\frac{7}{3}\right]$.
C. $\left(-\frac{7}{3};1\right)$. **D.** $\left\{-\frac{7}{3};1\right\}$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2\sqrt{2}x^2+8x-1$. Để $f'(x)=0$ thì x có giá trị thuộc tập hợp nào?
A. $\{2\sqrt{2}\}$. **B.** $\{-2\sqrt{2}\}$.
C. $\{2;\sqrt{2}\}$. **D.** $\varnothing$.

Câu 17. Đạo hàm của hàm số $y=2x^5-\frac{2}{x}+3$ bằng biểu thức nào sau đây?
A. $10x^4+\frac{2}{x^2}$. **B.** $10x^4-\frac{2}{x^2}$.
C. $10x^4+\frac{2}{x^2}+3$. **D.** $10x+\frac{2}{x^2}$.

Câu 18. Đạo hàm của hàm số $f(x)=2x^5-\frac{4}{x}+5$ tại $x=-1$ bằng số nào sau đây?
A. 21. **B.** 14. **C.** 10. **D.** – 6.

Câu 19. Cho $f(x)=5x^2$; $g(x)=2(8x-x^2)$. Bất phương trình $f'(x)>g'(x)$ có nghiệm là?
A. $x>\frac{8}{7}$. **B.** $x>\frac{6}{7}$. **C.** $x<\frac{8}{7}$. **D.** $x>-\frac{8}{7}$.

Câu 20. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị $y=x^3-2x^2+x-1$ tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ là:
A. $y=8x+3$. **B.** $y=8x+7$.
C. $y=8x+8$. **D.** $y=8x+11$.

Câu 21. Tiếp tuyến với đồ thị $y=x^3-x^2+1$ tại điểm có hoành độ $x_0=1$ có phương trình là:
A. $y=x$. **B.** $y=2x$.
C. $y=2x-1$. **D.** $y=x-2$.

Câu 22. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị $y=2x^3-3x^2+2$ tại điểm có hoành độ $x_0=2$ là:
A. 18. **B.** 14.
C. 12. **D.** 6.

Câu 23. Tiếp tuyến với đồ thị $y=x^3-x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0=-2$ có phương trình là:
A. $y=4x-8$. **B.** $y=20x-56$.
C. $y=20x+14$. **D.** $y=20x+24$.

Câu 24. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=2x^3-3x^2+5$ tại điểm có hoành độ -2 là:
A. 38. **B.** 36. **C.** 12. **D.** – 12.

Câu 25. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^4+x^3-2x^2+1$ tại điểm có hoành độ -1 là:
A. 11. **B.** 4. **C.** 3. **D.** – 3.

Câu 26. Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+1$ tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ có hệ số góc bằng:
A. 7. **B.** 5. **C.** 1. **D.** – 1.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)=x^4+2x^2-3$. Với giá trị nào của x thì $f'(x)$ dương?

A. $x>0$. B. $x<0$.

C. $x<-1$. D. $-1<x<0$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)=x^3-x^2-x+5$. Với giá trị nào của x thì $f'(x)$ âm?

A. $-1<x<\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{3}<x<1$.

C. $-\frac{1}{3}<x<1$. D. $-\frac{2}{3}<x<2$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)=mx-\frac{1}{3}x^3$. Với giá trị nào của m thì $x=-1$ là nghiệm của bất phương trình $f'(x)<2$?

A. $m>3$. B. $m<3$.

C. $m=3$. D. $m<1$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)=2mx-mx^3$. Với giá trị nào của m thì $x=1$ là nghiệm của bất phương trình $f'(x)\ge 1$?

A. $m\le -1$. B. $m\ge -1$.

C. $-1\le m\le 1$. D. $m\ge 1$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)=2x-\frac{3}{2}x^2$. Đạo hàm của hàm số f(x) nhận giá trị dương khi x nhận giá trị thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$. B. $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)$.

C. $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]$. D. $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 32. Cho hàm số $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$. Đạo hàm của hàm số f(x) nhận giá trị âm khi x nhận giá trị thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(-\infty;0)$. B. $(0;+\infty)$.

C. $(-\infty;1]\cup[1;+\infty)$. D. $[-1;1]$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3\sqrt{2}x^2+18x-2$. Để $f'(x)\ge 0$ thì x có giá trị thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(3\sqrt{2};+\infty)$. B. $[3\sqrt{2};+\infty)$. C. $\varnothing$. D. $\mathbb{R}$.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x-5$. Để $f'(x)<0$ thì x có giá trị thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$. B. $(-3;2)$.

C. $(-2;3)$. D. $(-\infty;-4]\cup[3;+\infty)$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-12x-1$. Để $f'(x)\ge 0$ thì x có giá trị thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(-\infty;-3]\cup[4;+\infty)$. B. $[-3;4]$.

C. $\left[-4;3\right]$. D. $(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{2x-3x^2}$. Để $f'(x)<0$ thì x có giá trị thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. B. $\left(0;\frac{1}{3}\right)$.

C. $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. D. $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Câu 37. Đạo hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-5x}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{1}{2\sqrt{x^2-5x}}$. B. $\frac{2x-5}{\sqrt{x^2-5x}}$.

C. $\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x}}$. D. $-\frac{2x-5}{\sqrt{x^2-5x}}$.

Câu 38. Đạo hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{2-3x^2}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{-6x}{\sqrt{2-3x^2}}$. B. $\frac{-6x^2}{2\sqrt{2-3x^2}}$.

C. $\frac{3x}{\sqrt{2-3x^2}}$. D. $\frac{-3x}{\sqrt{2-3x^2}}$.

Câu 39. Đạo hàm của hàm số $f(x)=(x+2)(x-3)$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $2x+5$. B. $2x-7$.

C. $2x-1$. D. $2x-5$.

Câu 40. Đạo hàm của hàm số $f(x)=\frac{2x-3}{2x-1}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-\frac{12}{(2x-1)^2}$. B. $-\frac{8}{(2x-1)^2}$.

C. $-\frac{4}{(2x-1)^2}$. D. $\frac{4}{(2x-1)^2}$.

Câu 41. Đạo hàm của hàm số $f(x)=\frac{x+4}{2x-1}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-\frac{7}{(2x-1)^2}$. B. $\frac{7}{(2x-1)^2}$.

C. $-\frac{9}{(2x-1)^2}$. D. $\frac{9}{(2x-1)^2}$.

Câu 42. Đạo hàm của hàm số $f(x)=\frac{x+4}{2-5x}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-\frac{18}{(2-5x)^2}$. B. $-\frac{13}{(2-5x)^2}$.

C. $\frac{3}{(2-5x)^2}$. D. $\frac{22}{(2-5x)^2}$.

Câu 43. Đạo hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2-3x}{2x+1}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-\dfrac{7}{(2x+1)^2}$.
B. $-\dfrac{4}{(2x+1)^2}$.
C. $\dfrac{8}{(2x+1)^2}$.
D. $\dfrac{1}{(2x+1)^2}$.

Câu 44. Hàm số nào sau đây có đạo hàm luôn dương với mọi giá trị thuộc tập xác định của hàm số đó?

A. $y=\dfrac{3x+2}{5x+1}$.
B. $y=\dfrac{3x-2}{5x+1}$.
C. $y=\dfrac{-x-2}{2x-1}$.
D. $y=\dfrac{-x+2}{x+1}$.

Câu 45. Hàm số nào sau đây có đạo hàm luôn âm với mọi giá trị thuộc tập xác định của hàm số đó?

A. $y=\dfrac{-x-2}{x+1}$.
B. $y=\dfrac{x-2}{x+1}$.
C. $y=\dfrac{3x-2}{x-1}$.
D. $y=\dfrac{3x+2}{x-1}$.

Câu 46. Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{3x+2}{2x-3}$ tại điểm có hoành độ $x_0=1$ có hệ số góc bằng bao nhiêu?

A. 13 **B.** -1. **C.** -5. **D.** -13.

Câu 47. Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x+5}{x-2}$ tại điểm có hoành độ $x_0=3$ có hệ số góc bằng bao nhiêu?

A. 3 **B.** -3. **C.** -7. **D.** -10.

Câu 48. Đạo hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{3x+5}{x-3}+\sqrt{x}$ tại điểm $x=1$ bằng bao nhiêu?

A. -3 **B.** 4. **C.** $\dfrac{7}{2}$. **D.** $\dfrac{-1}{2}$.

Câu 49. Đạo hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x-3}{x+3}+\sqrt{4x}$ tại điểm $x=1$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{-5}{8}$ **B.** $\dfrac{5}{8}$. **C.** $\dfrac{25}{16}$. **D.** $\dfrac{11}{8}$.

Câu 50. Đạo hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\sqrt{4x}$ tại điểm $x=1$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{-1}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 51. Đạo hàm của hàm số $f(x)=x^4+\sqrt{x}+2$ tại điểm $x=1$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{17}{2}$ **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $\dfrac{9}{4}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 52. Đạo hàm của hàm số $f(x)=x^3+\sqrt{x}-5$ tại điểm $x=1$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{7}{2}$ **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{7}{4}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 53. Đạo hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

B. $\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

C. $-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

D. $\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Câu 54. Đạo hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{2x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$.

B. $\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}$.

C. $-\frac{1}{\left(x^2-1\right)^2}$.

D. $\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$.

Câu 55. Đạo hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{4x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$.

B. $\frac{4x}{\left(x^2-1\right)^2}$.

C. $\frac{-2}{\left(x^2-1\right)^2}$.

D. $\frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}$.

Câu 56. Đạo hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2-x^2}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{2x}{\left(2-x^2\right)^2}$.

B. $-\frac{2x}{\left(2-x^2\right)^2}$.

C. $-\frac{2}{\left(2-x^2\right)^2}$.

D. $-\frac{1}{\left(2-x^2\right)^2}$.

Câu 57. Đạo hàm của hàm số $y=\frac{1-x^2}{2-x^2}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{2x}{\left(2-x^2\right)^2}$.

B. $-\frac{2x}{\left(2-x^2\right)^2}$.

C. $-\frac{2}{\left(2-x^2\right)^2}$.

D. $-\frac{1}{\left(2-x^2\right)^2}$.

Câu 58. Đạo hàm của hàm số $y=\frac{1}{x^2+x-1}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{-(2x+1)}{\left(x^2+x-1\right)^2}$.

B. $\frac{-2(x+1)}{\left(x^2+x-1\right)^2}$.

C. $\frac{-(2x-1)}{\left(x^2+x-1\right)^2}$.

D. $\frac{2(2x+1)}{\left(x^2+x-1\right)^2}$.

Câu 59. Đạo hàm của hàm số $y=\frac{x^2+x+1}{x^2+x-1}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-\dfrac{2(2x-1)}{\left(x^2+x-1\right)^2}$. **B.** $-\dfrac{2(2x+2)}{\left(x^2+x-1\right)^2}$.

C. $-\dfrac{2(2x+1)}{\left(x^2+x-1\right)^2}$. **D.** $\dfrac{2(2x+1)}{\left(x^2+x-1\right)^2}$.

Câu 60. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x^2+x+3}{x^2+x-1}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-\dfrac{2(2x+1)}{\left(x^2+x-1\right)^2}$. **B.** $-\dfrac{4(2x+1)}{\left(x^2+x-1\right)^2}$.

C. $-\dfrac{4(2x-1)}{\left(x^2+x-1\right)^2}$. **D.** $-\dfrac{4(2x+4)}{\left(x^2+x-1\right)^2}$.

Câu 61. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{2x^2+x+1}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-\dfrac{(4x-1)}{\left(2x^2+x+1\right)^2}$. **B.** $\dfrac{4x+1}{\left(2x^2+x+1\right)^2}$.

C. $-\dfrac{(4x+1)}{\left(2x^2+x+1\right)^2}$. **D.** $\dfrac{-1}{\left(2x^2+x+1\right)^2}$.

Câu 62. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{2x^2+x+5}{2x^2+x+2}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-\dfrac{-3(4x-1)}{\left(2x^2+x+2\right)^2}$. **B.** $\dfrac{-3(4x+1)}{\left(2x^2+x+2\right)^2}$.

C. $\dfrac{-3}{\left(2x^2+x+2\right)^2}$. **D.** $-\dfrac{-(4x+1)}{\left(2x^2+x+2\right)^2}$.

Câu 63. Đạo hàm của hàm số $y=(x^3-x^2)^2$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $6x^5+4x^3$. **B.** $6x^5-10x^4+4x$.

C. $6x^5-10x^4-4x^3$. **D.** $6x^5-10x^4+4x^3$.

Câu 64. Đạo hàm của hàm số $y=(x^5-2x^2)^2$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $10x^9+16x^3$. **B.** $10x^9-14x^6+16x^3$.

C. $10x^9-28x^6+16x^3$. **D.** $10x^9-28x^6+8x^3$.

Câu 65. Đạo hàm của hàm số $y=(x^3-x^2)^3$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $3(x^3-x^2)^2$. **B.** $3(x^3-x^2)^2(3x^2-2x)$.

C. $3(x^3-x^2)^2(3x^2-x)$. **D.** $3(x^3-x^2)(3x^2-2x)$.

Câu 66. Đạo hàm của hàm số $y=\left(x^3-x^2+x\right)^2$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $2\left(x^3-x^2+x\right)^2\left(3x^2-2x+1\right)$.

B. $2\left(x^3-x^2+x\right)\left(3x^2-2x^2+x\right)$.

C. $2\left(x^3-x^2+x\right)\left(3x^2-2x\right)$.

D. $2\left(x^3-x^2+x\right)\left(3x^2-2x+1\right)$.

Câu 67. Đạo hàm của hàm số $y=\left(\frac{2-3x}{2x+1}\right)^2$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{-14}{(2x+1)^2}\cdot\frac{2-3x}{2x+1}$.

B. $\frac{-4}{(2x+1)^2}\cdot\frac{2-3x}{2x+1}$.

C. $\frac{16}{(2x+1)^2}\cdot\frac{2-3x}{2x+1}$.

D. $2\left(\frac{2-3x}{2x+1}\right)$.

Câu 68. Đạo hàm của hàm số $y=(2x^2-x+1)^2$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $(4x-1)^2$.

B. $2(2x^2-x+1)(4x^2-x)$.

C. $2(2x^2-x+1)^2(4x-1)$.

D. $2(2x^2-x+1)(4x-1)$.

Câu 69. Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{3x^2-2x+12}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{1}{2\sqrt{3x^2-2x+12}}$.

B. $\frac{4x}{2\sqrt{3x^2-2x+12}}$.

C. $\frac{3x-1}{2\sqrt{3x^2-2x+12}}$.

D. $\frac{6x}{2\sqrt{3x^2-2x+12}}$.

Câu 70. Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{x^2-4x^3}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{1}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$.

B. $\frac{x-6x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$.

C. $\frac{x-12x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$.

D. $\frac{x-2x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$.

Câu 71. Cho hàm số $y=\sqrt{2x+2}$. Biểu thức $f(1)+f'(1)$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{9}{4}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Câu 72. Cho $f(x)=\left(x^2-3x+3\right)^2$. Biểu thức $f'(1)$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 1 B. -1. C. -2. D. -12.

Câu 73. Cho $f(x)=\left(3x^2-4x+1\right)^2$. Biểu thức $f'(2)$ có giá trị là bao nhiêu?

A.90 B. 80. C. 40. D.10.

Câu 74. Đạo hàm của hàm số $y=\tan 3x$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{3x}{\cos^2 3x}$.

B. $\frac{3}{\cos^2 3x}$.

C. $-\frac{3}{\cos^2 3x}$.

D. $-\frac{3}{\sin^2 3x}$.

Câu 75. Đạo hàm của hàm số $y=\tan 2x$ tại x = 0 là số nào sau đây?

A. -2 B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 76. Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\cos x}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{\cos x}{2\sqrt{\cos x}}$.
B. $\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$.
C. $-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$.
D. $-\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$.

Câu 77. Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\cos 2x}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}$.
B. $-\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$.
C. $\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$.
D. $-\frac{\sin 2x}{2\sqrt{\cos x}}$.

Câu 78. Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\sin x}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$.
B. $-\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$.
C. $\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$.
D. $\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}$.

Câu 79. Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\sin 3x}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$.
B. $\frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$.
C. $-\frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$.
D. $\frac{-\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$.

Câu 80. Đạo hàm của hàm số $y=\tan 5x$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{1}{\cos^2 5x}$.
B. $\frac{-5}{\sin^2 5x}$.
C. $\frac{-3}{\cos^2 5x}$.
D. $\frac{5}{\cos^2 5x}$.

Câu 81. Đạo hàm của hàm số $y=\tan 3x$ tại x = 0 có giá trị là bao nhiêu?

A. -3.
B. 0.
C. 3.
D. Không xác định.

Câu 82. Đạo hàm của hàm số $y=\tan^2 5x$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $2\tan 5x$.
B. $\frac{10\sin 5x}{\cos^3 5x}$.
C. $\frac{-10\sin 5x}{\cos^3 5x}$.
D. $\frac{5\sin 5x}{\cos^3 5x}$.

Câu 83. Hàm số nào sau đây có đạo hàm $y'=x\sin x$?

A. $x\cos x$.
B. $\sin x - x\cos x$.
C. $\sin x - \cos x$.
D. $x\cos x - \sin x$.

Câu 84. Đạo hàm của hàm số $y=\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)$.
B. $-\sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)$.

C. $-3\sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)$. D. $3\sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)$.

Câu 85. Đạo hàm của hàm số $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$. B. $-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$.

C. $-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$. D. $2\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$.

Câu 86. Đạo hàm của hàm số $f(x)=\left(3-x^2\right)^{10}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $10x\left(3-x^2\right)^9$. B. $10\left(3-x^2\right)^9$.

C. $20x\left(3-x^2\right)^9$. D. $-20x\left(3-x^2\right)^9$.

Câu 87. Đạo hàm số của hàm số $y=2\sin 2x+\cos 2x$ bằng biểu thức nào nào sau đây?

A. $4\cos 2x-2\sin 2x$. B. $4\cos 2x+2\sin 2x$.

C. $2\cos 2x-2\sin 2x$. D. $-4\cos 2x-2\sin 2x$.

Câu 88. Đạo hàm số của hàm số $y=\sin 3x+4\cos 2x$ bằng biểu thức nào nào sau đây?

A. $\cos 3x+4\sin 2x$. B. $3\cos 3x-4\sin 2x$.

C. $3\cos 3x-8\sin 2x$. D. $3\cos 3x+8\sin 2x$.

Câu 89. Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\sin 5x}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{-5\cos 5x}{2\sqrt{\sin 5x}}$. B. $\frac{5\cos 5x}{\sqrt{\sin 5x}}$.

C. $\frac{\cos 5x}{2\sqrt{\sin 5x}}$. D. $\frac{5\cos 5x}{2\sqrt{\sin 5x}}$.

Câu 90. Đạo hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{\cos 4x}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-\frac{2\sin 4x}{\sqrt{\cos 4x}}$. B. $-\frac{2\cos 4x}{\sqrt{\cos 4x}}$.

C. $-\frac{\sin 4x}{2\sqrt{\cos 4x}}$. D. $\frac{2\sin 4x}{\sqrt{\cos 4x}}$.

Câu 91. Cho $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$. Biểu thức $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ có giá trị là bao nhiêu?

A. -2 B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 92. Cho $f(x)=\sqrt{\sin 2x}$. Biểu thức $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 1. B. 0.

C. -1. D. Không xác định.

Câu 93. Đạo hàm số của hàm số $y=\cos^3 4x$ bằng biểu thức nào nào sau đây?

A. $3\sin^2 4x$. B. $3\cos^2 4x$.

C. $-12\cos^2 4x.\sin 4x$. D. $-3\cos^2 4x.\sin 4x$.

Câu 94. Đạo hàm số của hàm số $y=\sin^2 3x$ bằng biểu thức nào nào sau đây?

A. $6\sin 6x$. **B.** $3\sin 6x$.

C. $\sin 6x$. **D.** $2\sin 3x$.

Câu 95. Đạo hàm số của hàm số $f(x)=\sin 3x+\cos 2x$ bằng biểu thức nào nào sau đây?

A. $\cos 3x+\sin 2x$. **B.** $\cos 3x-\sin 2x$.

C. $3\cos 3x-2\sin 2x$. **D.** $-3\cos 3x+2\sin 2x$.

Câu 96. Cho $f(x)=\tan 4x$. Giá trị $f'(0)$ bằng số nào sau đây?

A. -4 **B.** -1. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 97. Đạo hàm của hàm số $y=\cot 2x$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{-1}{\sin^2 2x}$. **B.** $\frac{-2}{\sin^2 2x}$.

C. $\frac{-2}{\cos^2 2x}$. **D.** $\frac{2}{\cos^2 2x}$.

Câu 98. Đạo hàm của hàm số $y=\cot^4 2x$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{-8\cos^3 2x}{\sin^5 2x}$. **B.** $\frac{-8\cos^3 2x}{\sin^6 2x}$.

C. $\frac{-8\cos^3 2x}{\sin^2 2x}$. **D.** $\frac{-4\cos^3 2x}{\sin^5 2x}$.

Câu 99. Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\cot x}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{1}{2\sqrt{\cot x}}$. **B.** $-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cot x}}$.

C. $\frac{-1}{\sin^2 x\sqrt{\cot x}}$. **D.** $\frac{-1}{2\sin^2 x\sqrt{\cot x}}$.

Câu 100. Cho $f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x$ và $g(x)=3\sin^2 x.\cos^2 x$. Tổng $f'(x)+g'(x)$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $6(\sin^5 x+\cos^5 x+\sin x.\cos x)$.

B. $6(\sin^5 x-\cos^5 x-\sin x.\cos x)$.

C. 6.

D. 0.

Câu 101. Vi phân của hàm số $y=2x^5-\frac{2}{x}+5$ là biểu thức nào sau đây?

A. $\left(10x^4+\frac{2}{x^2}+5\right)dx$. **B.** $\left(10x^4-\frac{2}{x^2}\right)dx$.

C. $\left(10x^4+\frac{2}{x^2}\right)dx$. **D.** $\left(10x+\frac{2}{x^2}\right)dx$.

Câu 102. Vi phân của hàm số $y=\sqrt{x^2-5x}$ là biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{1}{2\sqrt{x^2-5x}}dx$. **B.** $\frac{2x-5}{\sqrt{x^2-5x}}dx$.

C. $-\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x}}dx$. **D.** $\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x}}dx$.

Câu 103. Vi phân của hàm số $y=\frac{2x+3}{2x-1}$ là biểu thức nào sau đây?

A. $-\frac{7}{(2x-1)^2}dx$.
B. $-\frac{8}{(2x-1)^2}dx$.
C. $-\frac{4}{(2x-1)^2}dx$.
D. $\frac{4}{(2x-1)^2}dx$.

Câu 104. Vi phân của hàm số $y=\tan 3x$ là biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{3}{\cos^2 3x}dx$.
B. $\frac{3x}{\cos^2 3x}dx$.
C. $-\frac{3}{\cos^2 3x}dx$.
D. $-\frac{3}{\sin^2 3x}dx$.

Câu 105. Vi phân của hàm số $f(x)=\sqrt{\cos x}$ là biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{\cos x}{2\sqrt{\cos x}}dx$.
B. $\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}dx$.
C. $\frac{-\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx$.
D. $\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}dx$.

Câu 106. Vi phân của hàm số $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)dx$.
B. $-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)dx$.
C. $-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)dx$.
D. $2\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)dx$.

Câu 107. Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x)=\frac{4}{5}x^5-6x^2-7x$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $16x^3-12$.
B. $16x^3-12x$.
C. $4x^3-12$.
D. $16x^2-12$.

Câu 108. Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x)=2x^5-\frac{4}{x}+5$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $40x^3-\frac{4}{x^3}$.
B. $40x^3+\frac{4}{x^3}$.
C. $40x^3-\frac{8}{x^3}$.
D. $40x^3+\frac{8}{x^3}$.

Câu 109. Đạo hàm cấp hai của hàm số $y=\cos 2x$ bằng biểu thức nào nào sau đây?

A. $-2\sin 2x$.
B. $-4\cos 2x$.
C. $-4\sin 2x$.
D. $4\cos 2x$.

Câu 110. Đạo hàm cấp hai của hàm số $y=\sin 2x$ bằng biểu thức nào nào sau đây?

A. $-\sin 2x$.
B. $-4\sin x$.
C. $-4\sin 2x$.
D. $-2\sin 2x$.

Câu 111. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S=t^3+3t^2+5t+2$, trong đó tính t bằng giây và tính S bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi t = 3 là:

A. 24 (m/s^2).
B. 17 (m/s^2).

C. $14\left(m/s^2\right)$. D. $12\left(m/s^2\right)$.

Câu 112. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-12x-1$. Tập hợp các giá trị x để đạo hàm cấp 2 của f(x) không âm là:

A. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$. B. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

C. $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. D. $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Tổng hợp lần 3. CHƯƠNG V. ĐẠO HÀM

Câu 1. Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^2+1$, Đặt $A=x^2y''-2y+1$. Chọn câu trả lời đúng:

A. $A=x^2$ **B.** $A=-1$ **C.** $A=0$ **D.** Tất cả đều sai

Câu 2. Cho hàm số $y=x^3-2x^2+1$. Nếu đặt $M=xy''-y'-3x^2$, thì ta có.

A. $M=0$ **B.** $M=1$ **C.** $M=-1$ **D.** $M=2$

Câu 3. Đạo hàm của hàm số $y=\left(13x^{13}+13\right)\left(1+x^{13}\right)$ tại $x_0=-1$ bằng:

A. 676 **B.** 13 **C.** 26 **D.** 0

Câu 4. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y=f\left(x\right)=x^2-2x+4$ tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ là:

A. $y=-4x+4$ **B.** $y=-2x+3$ **C.** $y=3x+5$ **D.** $y=-4x+3$

Câu 5. Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\frac{2x-4}{x+3}}$ là:

A. $y'=\frac{\sqrt{10}}{|x+3|}$ **B.** $y'=\frac{5}{2\left(x+3\right)\sqrt{\left(2x-4\right)\left(x+3\right)}}$

C. $y'=\frac{5}{\sqrt{\left(2x-4\right)\left(x+3\right)^2}}$ **D.** $y'=2\sqrt{\frac{x+3}{2x-4}}$

Câu 6. Cho hàm số $f\left(x\right)=\tan^3\frac{\pi x}{6}$. Giá trị của $f'\left(2\right)$ bằng:

A. 6π **B.** 12π **C.** 63π **D.** 36π

Câu 7. Cho hàm số $f\left(x\right)=2\cos^2\left(4x-1\right)$. Miền giá trị của $f'\left(x\right)$ là:

A. $\left[-8;8\right]$ **B.** $\left[-4;4\right]$ **C.** $\left[-1;1\right]$ **D.** $\left(-\infty;\infty\right)$

Câu 8. Cho hàm số $f\left(x\right)=\frac{2}{x}$ Tính giá trị của $f'\left(-1\right)$ là:

A. ±1 **B.** 0 **C.** -2 **D.** 2

Câu 9. Cho hàm số $y=\left(\pi x\right)^{\pi}$ là:

A. $y'=0$ **B.** $y'=2\pi x\left(\pi x\right)^{\pi-1}$ **C.** $y'=\pi x\left(\pi x\right)^{\pi-1}$ **D.** $y'=\pi^2\left(\pi x\right)^{\pi-1}$

Câu 10. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x^3-2x^2}{x(x-2)}+5x$ là:

A. 1 **B.** 5 **C.** 6 **D.** $5x+1$

Câu 11. Đạo hàm của hàm số $y=2x^2+\dfrac{x^3-3x^2}{x-3}$ là:

A. x^2 **B.** $2x$ **C.** $4x$ **D.** $6x$

Câu 12. Đạo hàm của hàm số $y=\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-4x\right)$ là:

A. $4\sin 4x$ **B.** $-4\cos 4x$ **C.** $-4\sin 4x$ **D.** $4\cos 4x$

Câu 13. Đạo hàm của hàm số $y=\sin x\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$ là:

A. $-\cos x$ **B.** $\sin x$ **C.** $-\sin x$ **D.** $\cos x$

Câu 14. Đạo hàm của hàm số $y=f(x)=\sum_{k=1}^{5}kx^5$ là:

A. $60x^3$ **B.** $75x^4$ **C.** $60x^4$ **D.** $75x^3$

Câu 15. Hàm số có đạo hàm bằng $2x+\dfrac{1}{x^2}$ là:

A. $y=\dfrac{x^3+1}{x}$ **B.** $y=\dfrac{x^3+5x-1}{x}$ **C.** $y=\dfrac{3x^3+3x}{x}$ **D.** $y=\dfrac{2x^2+x-1}{x}$

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=\sin^3(1-x)$. Với mọi $x\in\mathbb{R}$, hàm số có đạo hàm bằng:

A. $\cos^3(1-x)$ **B.** $-\cos^3(1-x)$

C. $-3\sin^2(1-x)\cos(1-x)$ **D.** $3\sin^2(1-x)\cos(1-x)$

Câu 17. Cho hàm số $y=x^3-2x^2+2x-3$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M có hoành đồ $x_0=1$ là:

A. $y=(3x^2-4x+2)(x-1)-2$ **B.** $y=0(x-1)-2$

C. $y=(x-1)-2$ **D.** $y=(x-1)+2$

Câu 18. Tại mọi điểm $x\neq 4$, hàm số $y=\dfrac{2x-3}{4-x}$ có đạo hàm là:

A. $y'=\dfrac{10}{(4-x)^2}$ **B.** $y'=-\dfrac{10}{(x-4)^2}$ **C.** $y'=\dfrac{5}{(4-x)}$ **D.** $y'=\dfrac{5}{(x-4)^2}$

Câu 19. Hàm số $y=x\sin x+\cos x$ có đạo hàm là:

A. $y'=\cos x-\sin x$ **B.** $y''=x\sin x$ **C.** $y'=\sin x+2\cos x$ **D.** $y''=-x\cos x$

Câu 20. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x>1\\ 3, & x=1\\ x^2+2, & x<1\end{cases}$. Kết luận nào sau đây **SAI**?

A. $f(x)$ liên tục tại $x=1$

B. $f(x)$ có đạo hàm tại $x=1$

C. $f(x)$ liên tục va có đạo hàm tại $x=1$

D. $f(x)$ liên tục tại $x=1$ nhưng không có đạo hàm tại $x=1$

Câu 21. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sin 2x+2,\ x>0\\ 3x+2,\ x\le 0\end{cases}$ .Khẳng định nào sau đây là đúng

A. $f(x)$ không liên tục tại $x=0$

B. $f(x)$ co đạo hàm tại $x=0$

C. $f(x)$ liên tục tại $x=0$ và co đạo hàm tại $x=0$

D. $f(x)$ liên tục tại $x=0$ và nhưng không có đạo hàm tại $x=0$

Câu 22. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+3\ khi\ x\ge 3\\ x^2\ khi\ x<3\end{cases}$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$

B. $f(x)$ có đạo hàm trong khoảng $(3;+\infty)$

C. $f(x)$ có đạo hàm trong khoảng $(-\infty;3)$

D. $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{3\}$

Câu 23. Cho hàm số $f(x)=x\cos x-\sin x$. Giá trị của $f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng:

A. 2 **B.** 1 **C.** -1 **D.** -2

Câu 24. Cho hàm số $y=x\cos x+\sin x$ có đồ thị (C). Hệ số của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x=-\frac{\pi}{2}$ lầ:

A. $-\frac{\pi}{2}$ **B.** 2 **C.** -2 **D.** $\frac{\pi}{2}$

Câu 25. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), song song với đường thẳng $(\Delta): y=9x+10$ là:

A. $y=9x+6\ hay\ y=9x-26$ **B.** $y=9x+6\ hay\ y=9x-28$

C. $y=9x-6\ hay\ y=9x-26$ **D.** $y=9x-6\ hay\ y=9x-28$

Câu 26. Đạo hàm cấp 2010 của hàm số $y=-\cos x+x^{20}$ là:

A. $\sin x$ **B.** $-\sin x$ **C.** cosx **D.** $-\cos x$

Câu 27. Cho hàm số $f(x)=x^2+\frac{1}{x}+x$. giá trị của $f'(1)$ bằng:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 28. Cho hàm số $f\left(x\right)=4x+\frac{1}{x^2}$. Giá trị của $f'\left(2\right)+f'\left(1\right)$ bằng:

A. $\frac{15}{4}$ **B.** $\frac{23}{4}$ **C.** $\frac{13}{2}$ **D.** $\frac{15}{2}$

Câu 29. Đạo hàm của hàm số $y=x\sqrt{x^2+1}$ bằng:

A. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **B.** $\frac{x}{x^2+1}$ **C.** $\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ **D.** $\frac{2x^2+1}{2\sqrt{x^2+1}}$

Câu 30. Cho hàm số $u\left(x\right)$ và $v\left(x\right)$ có đạo hàm là u' và v' Khẳng định nào sau đây là sai>

A. $\left(uv\right)'=u'v+v'u$ **B.** $\left(u+v\right)'=u'+v'$ **C.** $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ **D.** $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v+uv'}{v^2}$

ĐÁP ÁN

1B	2A	3D	4D	5C	6A	7A	8C	9D	10C
11D	12A	13B	14B	15B	16C	17C	18D	19D	20D
21D	22D	23D	24A	25A	26C	27B	28B	29C	30D